УДК 519.872

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-20–30

Т.В. Русилко, Д.Я. Копать

Дифференциальные уравнения для моментов вектора состояния замкнутой по структуре сети массового обслуживания с нетерпеливыми заявками

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы; Республика Беларусь, г. Гродно, 230023, ул. Ожешко, 22; rusilko@grsu.by, dk80395@mail.ru

Объектом исследования является замкнутая по структуре экспоненциальная сеть массового обслуживания с многолинейными узлами и нетерпеливыми заявками одного типа. Нетерпеливость заявок означает, что время ожидания заявок в очередях систем ограничено случайной величиной, имеющей показательное распределение. Обслуженные в узлах заявки и нетерпеливые заявки, не дождавшиеся своего обслуживания, перемещаются по сети с разными стохастическими матрицами передач.

Целью исследования является получение и решение системы дифференциальных уравнений для моментов первых двух порядков вектора состояния сети при асимптотическом условии большого числа заявок. Изначально состояние сети описывается цепью Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний. Система дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей ее состояний не поддается решению. Осуществляется предельный переход от цепи Маркова к непрерывному марковскому процессу в асимптотическом случае большого числа заявок. В результате этого перехода получено дифференциальное уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова для плотности распределения вероятностей процесса, определяющего относительное число заявок в узлах сети.

Используя характеристическую функцию, можно вывести системы обыкновенных дифференциальных уравнений для моментов первого порядка и моментов второго порядка компонент процесса, характеризующего состояние сети в асимптотическом случае. Решение этих уравнений позволяет определить среднее число заявок в узлах сети, дисперсию этого числа, корреляцию между числом заявок в разных узлах.

Результаты могут использоваться для анализа и оптимизации процесса функционирования сетей массового обслуживания и моделей на их основе.

Ключевые слова: *сеть массового обслуживания, моменты, асимптотический анализ, нетерпеливые заявки.*

Сеть массового обслуживания (СеМО) – совокупность взаимосвязанных систем массового обслуживания (СМО), в среде которых циркулируют заявки. СеМО имеет широкую прикладную область, в которой применяются модели массового обслуживания: телефония, компьютерные сети, банки и др. [1]. Рассмотрим замкнутую по структуре экспоненциальную СеМО из *n* систем S_i, $i=\overline{1,n}$, имеющую зависимый внешний источник – фиктивную СМО S_0, которую можно рассматривать как внешнюю среду.

Считаем, что источник генерирует простейший поток нетерпеливых заявок с интенсивностью λ_0 только в момент поступления некоторой заявки на его вход. Генерируемый на вход S_i поток заявок равен $\lambda_0 p_{0i}$, $i=\overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} p_{0i}=1$. Все системы марковские, в i-той СМО имеется m_i линий обслуживания, с интенсивностью работы μ_i, $i=\overline{1,n}$. Пусть $(p_{ij})_{(n+1)\times(n+1)}$ – матрица вероятностей передач.

Нетерпеливость заявок означает, что время ожидания заявок в очереди S_i ограничено экспоненциальным распределением с параметром θ_i, $i=\overline{1,n}$; $(q_{ij})_{(n+1)\times(n+1)}$ – матрица вероятностей передач по истечении времени ожидания в очередях систем [2]. Применение такой сети обосновывается тем, что зачастую клиенты отказываются от обслуживания только из-за возможности длительной задержки начала обслуживания.

Вектор состояния СеМО в силу ее экспоненциальности является дискретным марковским процессом:

$$\vec{k}(t)=\left(k_1(t),k_2(t),\dots,k_n(t)\right), \tag{1}$$

где $k_i(t)$ – число заявок в i-той СМО в момент времени t, $i=\overline{1,n}$. Пусть $\sum_{i=1}^{n} k_i(t)=K(t)$ – общее число заявок в системах сети. Положим, что общее число заявок в сети и внешней среде ограничено константой $K \geq K(t)>>1$ [3; 4].

Прежде всего определим уравнения для вероятностей состояний процесса (1). Используя формулу полной вероятности для всех возможных переходов процесса в состояние $k(t+\Delta t)=(k,t+\Delta t)$ за короткий промежуток времени Δt, получим следующую систему разностных уравнений для $P(\vec{k},t)$:

$$P(\vec{k},t+\Delta t)=\sum_{i=1}^{n} P(\vec{k}-\vec{I}_i,t)\lambda_0 p_{0i}\left(K-\sum_{i=1}^{n}k_i(t)+1\right)\Delta t+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} P(\vec{k}+\vec{I}_i-\vec{I}_j,t)\left(\mu_i p_{ij}\min(m_i,k_i(t)+1)+\theta_i q_{ij}(k_i(t)+1-m_i)u(k_i(t)+1-m_i)\right)\Delta t+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} P(\vec{k}+\vec{I}_i,t)\left(\mu_i p_{i0}\min(m_i,k_i(t)+1)+\theta_i q_{i0}(k_i(t)+1-m_i)u(k_i(t)+1-m_i)\right)\Delta t+$$

$$+P(\vec{k},t)\left(1-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i\min(m_i,k_i(t))+\theta_i(k_i(t)-m_i)u(k_i(t)-m_i)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\lambda_0 p_{0i}\left(K-\sum_{i=1}^{n}k_i(t)\right)\right)\right)\Delta t\right)+o(\Delta t),$$

где $\vec{I}_i$ – n-вектор с нулевыми компонентами за исключением i-той, равной 1, $u(z)=\begin{cases}1, & z<0,\\ 0, & z\ge 0.\end{cases}$. Перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим систему разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{dP(\vec{k},t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_0 p_{0i}\left(K-\sum_{i=1}^{n}k_i(t)\right)\left(P(\vec{k}-\vec{I}_i,t)-P(\vec{k},t)\right)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left(\mu_i p_{ij}\min(m_i,k_i(t))+\theta_i q_{ij}(k_i(t)-m_i)u(k_i(t)-m_i)\right)\left(P(\vec{k}+\vec{I}_i-\vec{I}_j,t)-P(\vec{k},t)\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i p_{i0}\min(m_i,k_i(t))+\theta_i q_{i0}(k_i(t)-m_i)u(k_i(t)-m_i)\right)\left(P(\vec{k}+\vec{I}_i,t)-P(\vec{k},t)\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_0 p_{0i}P(\vec{k}-\vec{I}_i,t)+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i p_{ij}\left(\min(m_i,k_i(t)+1)-\min(m_i,k_i(t))\right)P(\vec{k}+\vec{I}_i-\vec{I}_j,t)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\theta_i q_{ij}\left((k_i(t)+1-m_i)u(k_i(t)+1-m_i)-(k_i(t)-m_i)u(k_i(t)-m_i)\right)P(\vec{k}+\vec{I}_i-\vec{I}_j,t)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\mu_i p_{i0}\left(\min(m_i,k_i(t)+1)-\min(m_i,k_i(t))\right)P(\vec{k}+\vec{I}_i,t)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\theta_i q_{i0}\left((k_i(t)+1-m_i)u(k_i(t)+1-m_i)-(k_i(t)-m_i)u(k_i(t)-m_i)\right)P(\vec{k}+\vec{I}_i,t).$$

Осуществим предельный переход от цепи Маркова к непрерывному процессу в асимптотическом случае большого числа заявок в сети: $K\to\infty$ [5–10]. Вектор относительных переменных $\vec{\xi}(t)=\vec{k}(t)/K$ в течение малого промежутка времени совершает изменение состояния на $\vec{e}_i$, где $\vec{e}_i=\varepsilon\vec{I}_i$ при $\varepsilon=1/K$. Чтобы перейти к непрерывному случаю, нужно положить $K\to\infty$, т. е. $\varepsilon\to 0$. В этом случае вектор $\vec{\xi}(t)$ будет непрерывным марковским процессом с плотностью распределения $p(\vec{x},t)$, $x_i\ge 0,\ i=\overline{1,n},\ \sum_{i=1}^{n}x_i\le 1$.

Пусть $l_i=m_i/K$, $i=\overline{1,n}$. Положив в предыдущей системе разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова $K\to\infty$, осуществив переход $\frac{P(\vec{k},t)}{\varepsilon^n}\xrightarrow[K\to\infty]{}p(\vec{x},t)$, а также допустив, что входящие в систему функции можно дважды дифференцировать и представить рядом Тейлора, получим

$$\frac{dP(\vec{k},t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_0 p_{0i}\left(1-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(-\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial x_i}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2 p(\vec{x},t)}{\partial x_i^2}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\mu_i p_{ij}\min(l_i,x_i(t))+\theta_i q_{ij}(x_i(t)-l_i)u(x_i(t)-l_i)\Big)\times$$

$$\times\left(\left(\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial x_i}-\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial x_j}\right)+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p(\vec{x},t)}{\partial x_i^2}-2\frac{\partial^2 p(\vec{x},t)}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2 p(\vec{x},t)}{\partial x_j^2}\right)\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_0 p_{0i}\left(p(\vec{x},t)-\varepsilon\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial x_i}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p(\vec{x},t)}{\partial x_i^2}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i p_{ij}\frac{\partial \min(l_i,x_i)}{\partial x_i}\left(p(\vec{x},t)+\varepsilon\left(\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial x_i}-\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial x_j}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p(\vec{x},t)}{\partial x_i^2}-2\frac{\partial^2 p(\vec{x},t)}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2 p(\vec{x},t)}{\partial x_j^2}\right)\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\theta_i q_{ij}\frac{\partial\big((x_i(t)-l_i)u(x_i(t)-l_i)\big)}{\partial x_i}\left(p(\vec{x},t)+\varepsilon\left(\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial x_i}-\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial x_j}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p(\vec{x},t)}{\partial x_i^2}-2\frac{\partial^2 p(\vec{x},t)}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2 p(\vec{x},t)}{\partial x_j^2}\right)\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Big(\mu_i p_{i0}\min(l_i,x_i(t))+\theta_i q_{i0}(x_i(t)-l_i)u(x_i(t)-l_i)\Big)\left(-\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial x_i}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2 p(\vec{x},t)}{\partial x_i^2}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\mu_i p_{i0}\frac{\partial \min(l_i,x_i)}{\partial x_i}\left(p(\vec{x},t)-\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial x_i}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2 p(\vec{x},t)}{\partial x_i^2}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\theta_i q_{i0}\frac{\partial\big((x_i(t)-l_i)u(x_i(t)-l_i)\big)}{\partial x_i}\left(p(\vec{x},t)-\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial x_i}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2 p(\vec{x},t)}{\partial x_i^2}\right)+o(\varepsilon^2).$$

Группируя члены в правой части полученного равенства, получаем, что с точностью до $\mathrm{O}\left(K^{-2}\right)$ плотность распределения процесса $\vec{\xi}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных параболического типа, известному как уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова:

$$\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(A_i(\vec{x},t)p(\vec{x},t)\Big)+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Big(B_{ij}(\vec{x},t)p(\vec{x},t)\Big),\qquad(2)$$

где $A_i(\vec{x},t)=\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_j \min(x_j,l_j)p_{ji}^{*}+\theta_j(x_j-l_j)u(x_j-l_j)q_{ji}^{*}\right)+\lambda_0 p_{0i}\left(1-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$,

$$B_{ii}(\vec{x})=\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_j \min(l_j,x_j)p_{ji}^{**}+\theta_j(x_j-l_j)u(x_j-l_j)q_{ji}^{**}\right)+\lambda_0 p_{0i}\left(1-\sum_{i=1}^{n}x_i\right),$$

$$B_{ij}(\vec{x})=-\mu_i \min(l_i,x_i)p_{ij}-\theta_i(x_i-l_i)u(x_i-l_i)q_{ij}\,,\ i\neq j\,,\ i,j=\overline{1,n}\,,$$

$$p_{ji}^{*}=\begin{cases}p_{ji},\ i\neq j,\\ p_{ji}-1,\ i=j;\end{cases}\quad p_{ij}^{**}=\begin{cases}p_{ij},\ i\neq j,\\ p_{ij}+1,\ i=j;\end{cases}\quad q_{ji}^{*}=\begin{cases}q_{ji},\ i\neq j,\\ q_{ji}-1,\ i=j;\end{cases}\quad q_{ij}^{**}=\begin{cases}q_{ij},\ i\neq j,\\ q_{ij}+1,\ i=j.\end{cases}$$

Уравнение (2) играет фундаментальную роль при изучении непрерывных марковских процессов, однако его решение в многомерном случае представляет собой задачу большой сложности. Для специалистов теории массового обслуживания важно знать статистические средние характеристики процесса $\vec{\xi}(t)$. Столько же информации о случайном процессе, что и плотность вероятности, дает характеристическая функция $\varphi(\vec{\lambda},t)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{I\vec{\lambda}\vec{x}^{\mathrm{T}}}p(\vec{x},t)d\vec{x}$, $I=\sqrt{-1}$. Помножив обе части (2) на $e^{I\vec{\lambda}\vec{x}^{\mathrm{T}}}$, проинтегрировав по $\vec{x}$ и учитывая определенные начальные и граничные условия [8] уравнение (2) сведем к уравнению для характеристической функции:

$$\frac{\partial\varphi(\vec{\lambda},t)}{\partial t}=\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\sum_{i=1}^{n}I\lambda_i A_i(\vec{x},t)-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j B_{ij}(\vec{x},t)\right\}p(\vec{x},t)e^{I\vec{\lambda}\vec{x}^{\mathrm{T}}}d\vec{x}\,. \quad (3)$$

Нас интересуют математические ожидания, дисперсии и функции кросс-корреляции компонент процесса $\vec{\xi}(t)$. Используем известные свойства характеристической функции для определения моментов первых двух порядков вектора $\vec{\xi}(t)$ [9]. Моменты первого порядка, т. е. математические ожидания составляющих $\vec{\xi}(t)$ определяются так:

$$\nu_i^{(1)}(t)=M\left(\xi_i(t)\right)=I^{-1}\left.\frac{\partial\varphi(\vec{\lambda},t)}{\partial\lambda_k}\right|_{\vec{\lambda}=\vec{0}}\,,\ i=\overline{1,n}\,.$$

Смешанные моменты второго порядка или функции кросс-корреляции $\xi_i(t)$ и $\xi_k(t)$ определяются с помощью производной второго порядка:

$$\nu_{ik}^{(1,1)}(t)=\nu_{ki}^{(1,1)}(t)=M\left(\xi_i(t)\xi_k(t)\right)=I^{-2}\left.\frac{\partial^2\varphi(\lambda,t)}{\partial\lambda_i\partial\lambda_k}\right|_{\vec{\lambda}=0}\,,\ i,j=\overline{1,n}\,.$$

Установлено, что моменты первого и второго порядка удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида [10]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\nu_i^{(1)}(t)}{dt} = \dfrac{dM\left(\xi_i(t)\right)}{dt} = I^{-1}\left.\dfrac{\partial^2\varphi(\vec{\lambda},t)}{\partial t\partial\lambda_i}\right|_{\vec{\lambda}=\vec{0}} = A_i(\vec{\nu}^{(1)}(t)),\ i=\overline{1,n}; \\ \dfrac{d\nu_{ik}^{(1,1)}(t)}{dt} = \dfrac{dM\left(\xi_i(t)\xi_k(t)\right)}{dt} = I^{-2}\left.\dfrac{\partial^3\varphi(\vec{\lambda},t)}{\partial t\partial\lambda_i\partial\lambda_k}\right|_{\vec{\lambda}=\vec{0}} = \\ = M\left(\xi_i(t)A_k(\vec{\xi}(t))\right) + M\left(\xi_k(t)A_i(\vec{\xi}(t))\right) + \varepsilon B_{ik}(\vec{\nu}^{(1)}(t)),\ i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{4}$$

Математическое ожидание $M\left(\xi_i(t)\right)$ и дисперсия $\sigma_i^2(t)=\sigma^2\left(\xi_i(t)\right)$ в общем случае – детерминированные функции времени, определяющие соответственно среднюю траекторию процесса $\xi_i(t)$ и рассеяние вокруг нее, $i=\overline{1,n}$. Интервал $\left(\nu_i^{(1)}(t)\pm\sigma_i(t)\right)$ – интервал, в который с вероятностью около 70 % попадают реализации $\xi_i(t)$. Дисперсии составляющих вектора состояния СеМО определяются с помощью моментов по следующей формуле:

$$\sigma_i^2(t)=\nu_{ii}^{(1,1)}(t)-\left(\nu_i^{(1)}(t)\right)^2.$$

На основе функций кросс-корреляции $\nu_{ik}^{(1,1)}(t)$ можно определить нормированную взаимную корреляционную функцию

$$corr_{ik}(t)=corr(\xi_i(t),\xi_k(t))=\frac{\nu_{ik}^{(1,1)}(t)-\nu_i^{(1)}(t)\nu_k^{(1)}(t)}{\sigma_i(t)\sigma_k(t)},$$

которая является мерой линейной зависимости составляющих вектора $\vec{\xi}(t)$, т. е. позволяет определить наличие линейной корреляции между числом заявок в каждой из возможных пар СМО в момент времени t.

Пример. Рассмотрим СеМО, заданную следующей совокупностью параметров: число СМО – $n=2$; число линий обслуживания в СМО – $m_1=3$, $m_2=5$; матрица вероятностей передач, ненулевые элементы которой – $p_{01}=p_{12}=p_{20}=1$; матрица вероятностей передач, по истечении времени ожидания в очереди – $q_{10}=1$, $q_{ij}=0$ в других случаях; интенсивность источника заявок $\lambda_0=1$ з/мин; интенсивности обслуживания заявок в узлах – $\mu_1=2$ з/мин, $\mu_2=18$ з/мин; $K=1\ 000$. Система S_2 функционирует без перегрузки и образования очереди, значит $\min(x_2,l_2)=x_2$; система S_1 функционирует при постоянном наличии очереди, заявки покидают очередь с интенсивностью $\theta_1=0.1$ з/мин, поэтому $\min(x_1,l_1)=l_1$, $u(x_1-l_1)=1$.

Система (4) для описанного случая имеет вид:

$$\nu_1^{(1)\prime}(t)=-\mu_1 l_1-\theta_1(\nu_1^{(1)}(t)-l_1)+\lambda_0 p_{01}\left(1-\nu_1^{(1)}(t)-\nu_2^{(1)}(t)\right);$$

$$\nu_2^{(1)\prime}(t)=\mu_1 l_1-\mu_2\nu_2^{(1)}(t);$$

$$\nu_{11}^{(1,1)\prime}(t) = -2\mu_1 l_1 \nu_1^{(1)}(t) - 2\theta_1(\nu_{11}^{(1)}(t) - l_1\nu_1^{(1)}(t)) + 2\lambda_0 p_{01}\left(\nu_1^{(1)}(t) - \nu_{11}^{(1)}(t) - \nu_{12}^{(1)}(t)\right) +$$
$$+\varepsilon\left(\mu_1 l_1 + \theta_1(\nu_1^{(1)}(t) - l_1) + \lambda_0 p_{01}\left(1 - \nu_1^{(1)}(t) - \nu_2^{(1)}(t)\right)\right);$$
$$\nu_{12}^{(1,1)\prime}(t) = -\mu_1 l_1 \nu_2^{(1)}(t) - \theta_1(\nu_{12}^{(1)}(t) - l_1\nu_2^{(1)}(t)) + \lambda_0 p_{01}\left(\nu_2^{(1)}(t) - \nu_{12}^{(1)}(t) - \nu_{22}^{(1)}(t)\right) +$$
$$+\mu_1 l_1 \nu_1^{(1)}(t) - \mu_2 \nu_{12}^{(1)}(t) - \varepsilon \mu_1 l_1;$$
$$\nu_{22}^{(1,1)\prime}(t) = 2\mu_1 l_1 \nu_2^{(1)}(t) - 2\mu_2 \nu_{22}^{(1)}(t) + \varepsilon\left(\mu_1 l_1 + \mu_2 \nu_2^{(1)}(t)\right).$$

Определив моменты из последней системы при нулевом начальном условии, можем графически изобразить средние траектории составляющих процесса $\vec{\xi}(t)$ – $\nu_i^{(1)}(t)$, а также нижнюю и верхнюю границы диапазона ожидаемого отклонения реализаций компонент процесса $\vec{\xi}(t)$ от среднего уровня – $\left(\nu_i^{(1)}(t) \pm \sigma_i(t)\right)$, $i = \overline{0,2}$. Например, на графиках 1 и 2 представлены расчеты для СМО S_1 и внешней среды S_0: сплошной линией – средние траектории, пунктиром – диапазоны ожидаемого отклонения.

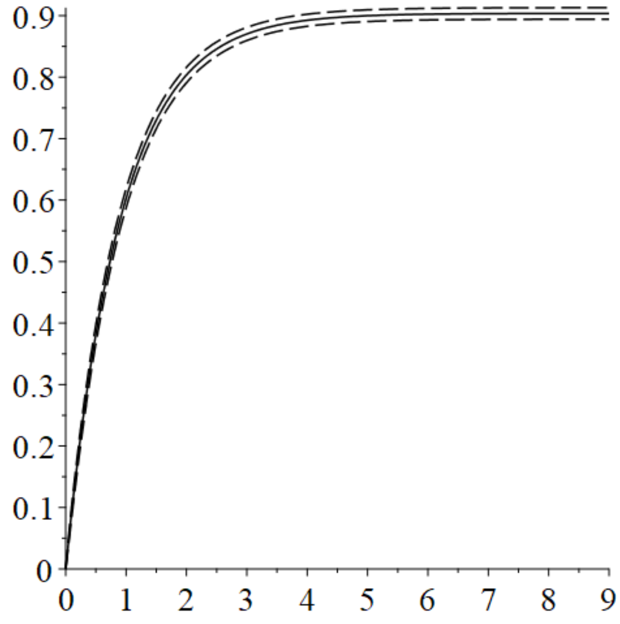

Рис. 1. Средняя траектория и ожидаемое отклонение для $\xi_1(t)$

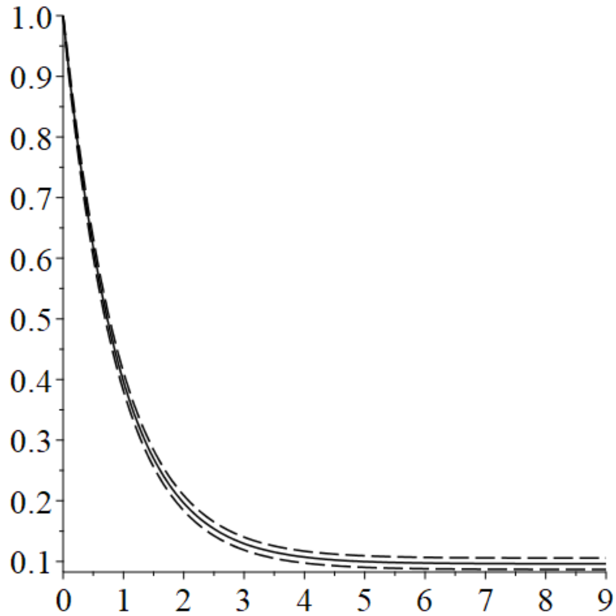

Рис. 2. Средняя траектория и ожидаемое отклонение для $\xi_0(t)$

Очевидно, что случайные процессы $\xi_1(t)$ и $\xi_0(t)$ быстро переходят в стационарный режим (при $t \approx 6$ мин) как по среднему значению $\lim_{t\to\infty} \nu_1^{(1)}(t) = 0.901$, $\lim_{t\to\infty} \nu_0^{(1)}(t) = 0.096$, так и по дисперсии $\lim_{t\to\infty} \sigma_1(t) = 0.009$, $\lim_{t\to\infty} \sigma_0(t) = 0.009$. В стационарном режиме волатильность процессов постоянна, следовательно поведение процессов в СМО в среднем прогнозируемо с высокой надежностью. Расчеты для компоненты $\xi_2(t)$ в графическом виде не приводятся. В СМО S_2 также устанавливается стационарный режим: $\lim_{t\to\infty} \nu_2^{(1)}(t) = 0.0003$, $\lim_{t\to\infty} \sigma_2(t) = 0.0006$. В стационарном режиме $\nu_i^{(1)}(t)$ численно равны вероятностям пребывания отдельной заявки (клиента) в системе S_i, $i = \overline{0,2}$.

Также были рассчитаны нормированные взаимные корреляционные функции: $\lim_{t\to\infty} corr_{12}(t) = -0.03$, $\lim_{t\to\infty} corr_{01}(t) \approx -1$, $\lim_{t\to\infty} corr_{02}(t) \approx 0$. Значит число заявок в СМО S_1 и S_2, а также S_0 и S_2 не коррелирует; между числом заявок во внешней среде и S_1 наблюдается обратная линейная корреляция.

Заключение

В данной статье рассмотрен вывод дифференциального уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для плотности распределения вектора состояния замкнутой по структуре СеМО с нетерпеливыми заявками, функционирующей в асимптотическом случае высокой нагрузки. Представлена система обыкновенных дифференциальных уравнений для моментов первого и второго порядков вектора, характеризующая состояние сети. Рассмотрен пример, иллюстрирующий применение дифференциальных уравнений для анализа работы СеМО: математического ожидания и волатильности числа заявок в каждой из СМО, показателей корреляции между числом заявок в узлах сети. Перечисленные характеристики могут быть определены как в стационарном режиме, так и в переходном.

Результаты могут использоваться для анализа процесса функционирования сетей и решения различных оптимизационных задач, цель которых определить параметры эффективной работы СеМО и объектов, моделируемых с помощью СеМО. Могут быть решены задачи прогнозирования доходов СеМО [11; 12].

Литература

1. *Матальцкий М.А., Романюк Т.В.* Приближенные методы анализа сетей с центральной системой обслуживания и их применения. – Гродно: ГрГУ, 2003. – 200 с.
2. *Ковалев Е.А.* О поведении нетерпеливых требований в сетях массового обслуживания с ограниченным временем ожидания в очередях // Автоматика и вычислительная техника. – 1987. – № 2. – С. 88–90.
3. *Русилко Т.В.* Метод исследования открытой сети массового обслуживания с ограниченным числом однотипных заявок // Фундаментальные и прикладные научные исследования: актуальные вопросы, достижения и инновации; сб. ст. XVII Межд. науч.-практ. конф. (г. Пенза, 15 нояб. 2018 г.). – Пенза: МЦНС «Наука и просвещение», 2018. – С. 12–17.
4. *Русилко Т.В.* Асимптотический анализ открытой сети массового обслуживания с ограниченным числом однотипных заявок двух классов // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2: Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2016. – № 2. – С. 136–143.
5. *Русилко Т.В.* Применение уравнения Колмогорова при исследовании сетей массового обслуживания // Современные проблемы анализа динамических систем. Теория и практика: материалы Межд. открытой конф. (Воронеж, 21–23 мая 2019 г.). – Воронеж: ФГБОУ ВО «ВГЛТУ», 2019. – С. 405–407.
6. *Русилко Т.В., Алейникова В.Г.* Асимптотический анализ открытой сети массового обслуживания с ограниченным числом однотипных заявок // Технологии информатизации и управления. ТИМ-2016: материалы III Межд. науч.-практ. конф. (г. Гродно, 14–15 апреля 2016 г.). – Гродно: ГрГУ, 2016. – С. 1–7.
7. *Статкевич С.Э.* Асимптотический анализ открытой сети с ограниченным временем ожидания заявок и ненадежным обслуживанием // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2: Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2016. – Т. 6, № 3. – С. 150–162.
8. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986. – 526 с.
9. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М.: Наука, 1967. – 495 с.

10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1995. – 703 с.

11. *Русилко Т.В., Галицкая-Петровская А.О.* Ожидаемый доход открытой сети обслуживания с ограниченным числом заявок // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2: Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2020. – Т. 10, № 1. – С. 128–134.

12. *Статкевич С.Э.* Применение НМ-сетей с различными особенностями при прогнозировании доходов страховой компании с разнотипными исками // Еругинские чтения – 2019. XIX Межд. научная конференция по дифференциальным уравнениям: материалы конф. (Могилёв, 14–17 мая 2019 г.). – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2019. – С. 96–97.

Поступила в редакцию 22 марта 2021 г.

UDC 519.872

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-20–30

Differential Equations for the Moments of the State Vector of a Closed Queueing Network With Eager Customers

T.V. Rusilko, D.Ya. Kopats

Yanka Kupala State University of Grodno; Belarus, Grodno, 230023, ул. Ожешко, 22; rusilko@grsu.by, dk80395@mail.ru

The object of the study is a closed exponential queueing network with multi-line nodes and eager customers of a single type. Customer impatience means that the waiting time for customers in the queues is limited to a random variable with an exponential distribution. Customers served at the nodes and impatient customers who did not wait for their service move through the network with different transition matrices. These matrices are stochastic.

The purpose of the study is to obtain and solve a system of differential equations for the first-order and second-order moments in the number of customers in network nodes under the asymptotic assumption of a large number of customers. Initially, the state of the network is described by a continuous-time Markov chain with a finite state space. The Kolmogorov system of differential equations for the probabilities of states defies solution. The mathematical transition is made from a Markov chain to a continuous stochastic process with the Markov property in the asymptotic case of a large number of customers. As a result of this transition, the Fokker–Planck–Kolmogorov differential equation was obtained for the probability density function of the process, which determines the relative number of customers in the network nodes.

Using the characteristic function, systems of ordinary differential equations are derived for the first-order and second-order moments of state process in the asymptotic case. The solution of these equations makes it possible to determine the average number of customers in the network nodes, the variance of this number, the correlation between the number of customers in different nodes.

The results can be used to analyze and optimize the functioning of the networks and models based on them.

Keywords: *queueing network, moments, asymptotic analysis, impatient customers.*

Received 22 March 2021