МАТЕМАТИКА

УДК 517.968

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-7–14

М.М. Зайнулабидов, З.М. Зайнулабидова, М.М. Шихшинатова

О законах композиции сингулярных интегралов с ядрами Коши–Трикоми, Абеля–Трикоми, Гильберта–Трикоми с функциональными параметрами и о решении некоторых интегральных уравнений с такими ядрами

Дагестанский государственный педагогический университет; Россия, 367003, г. Махачкала, ул. Ярагского, 57; shichmum_2006@mail.ru

При нахождении решений сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши, Абеля, Гильберта определенную роль играют формула перестановки порядка интегрирования Пуанкаре–Бертрана для интегралов с ядром Коши и формулы композиции интегралов с ядрами Абеля и Гильберта.

Представленные в настоящей статье исследования преследуют цель получить аналогичные формулы для интегралов и интегральных уравнений с ядрами Коши–Трикоми, Абеля–Трикоми, Гильберта–Трикоми с функциональными параметрами в плане обобщения известных результатов.

В качестве метода исследования выбран метод поиска преобразований, которые сводят изучаемую проблему к ранее изученной.

В статье найдены замены переменных, которые сводят операторы с ядрами Коши–Трикоми, Абеля–Трикоми, Гильберта–Трикоми к операторам с ядрами Коши, Абеля, Гильберта с другими плотностями, что позволяет, используя известные результаты и переходя к первоначальным переменным, решить изучаемую проблему. С помощью полученных при этом формул найдены решения обобщенного интегрального уравнения с ядром Абеля–Трикоми с функциональным параметром и некоторых других уравнений.

Основными результатами исследований являются формула типа Пуанкаре–Бертрана для интегралов с ядром Коши–Трикоми; формулы композиций интегралов с ядрами Абеля–Трикоми и Гильберта–Трикоми с функциональными параметрами; формулы решений обобщенного уравнения Абеля–Трикоми и некоторых других уравнений с ядрами типа Коши–Трикоми, Гильберта–Трикоми.

На основе полученных данных можно сделать вывод о том, что связанные с формулой перестановки порядка интегрирования Пуанкаре–Бертрана для интегралов с ядром Коши и с формулами композиций интегралов с ядрами Абеля и Гильберта результаты могут быть обобщены на операторы с ядрами Коши–Трикоми, Абеля–Трикоми, Гильберта–Трикоми с функциональными параметрами.

Ключевые слова: *формула перестановки порядка интегрирования Пуанкаре–Бертрана для интегралов с ядром Коши–Трикоми; формулы композиций интегралов с ядрами Абеля–*

Трикоми и Гильберта–Трикоми; решение обобщенного уравнения Абеля–Трикоми; операторы Коши–Трикоми, Абеля–Трикоми, Гильберта–Трикоми с функциональными параметрами.

В теории сингулярных интегральных уравнений [2, 12, 13, 15] для операторов Коши, Абеля, Гильберта:

$$k\varphi = \int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)dt}{t-x},\quad A\varphi = \int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{\delta}},\quad 0<\delta<1,\quad H\varphi = \int_{-1}^{1}\varphi(t)ctg\frac{t-x}{2}dt$$

известны равенства

$$\int_{-1}^{1}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon-y}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\varepsilon,\eta)d\eta}{\eta-\varepsilon} = -\pi^2\psi(y,y) + \int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\varepsilon,\eta)d\eta}{(\varepsilon-y)(\eta-\varepsilon)}, \tag{1}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon-y}\int_{-1}^{1}\frac{d\eta}{\eta-\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[ln^2\frac{1-y}{1+y}-\pi^2\right], \tag{2}$$

$$\int_{y}^{1}\frac{d\varepsilon}{(\varepsilon-y)^{\alpha}}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\psi(\eta)d\eta}{(\eta-\varepsilon)^{\beta}} = B(1-\alpha,1-\beta)\int_{y}^{1}\frac{\psi(\eta)d\eta}{(\eta-y)^{\alpha+\beta-1}}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{0}^{2\pi}ctg\frac{\varepsilon-y}{2}d\varepsilon\int_{0}^{2\pi}\psi(\eta)ctg\frac{\eta-\varepsilon}{2}d\eta = -\psi(y) + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\psi(\eta)d\eta, \tag{4}$$

где $0<\alpha,\ \beta<1,\ -1<y<1,\ B(1-\alpha,\ 1-\beta)$ – бета-функция.

Равенство (1) известно как формула перестановки порядка интегрирования Пуанкаре–Бертрана.

Равенства (2), (3), (4) определяют законы композиций интегралов с ядрами Коши, Абеля, Гильберта соответственно.

Известно также, что решение $\psi(y)$ обобщенного интегрального уравнения Абеля

$$\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\varepsilon)d\varepsilon}{|\varepsilon-y|^{\delta}} = g(y),\ 0<\delta<1 \tag{5}$$

имеет интегральное представление [15, с. 190]

$$\psi(y) = \frac{1}{2\pi}ctg\frac{\pi\delta}{2}\frac{d}{dy}\int_{-1}^{1}\frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{(y-\varepsilon)^{1-\delta}} - \frac{1}{\pi^2}\cos^2\left(\frac{\pi\delta}{2}\right)\int_{-1}^{y}\frac{Z(\varepsilon)F(\varepsilon)d\varepsilon}{(y-\varepsilon)^{1-\delta}}, \tag{6}$$

$$z(\varepsilon) = (\varepsilon+1)^{\frac{1+\delta}{2}}(1-\varepsilon)^{\frac{1-\delta}{2}}.\quad F(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{d\eta}{(\varepsilon-\eta)^{\delta}}\int_{\eta}^{1}\frac{g(s)ds}{z(s)(s-\eta)^{1-\delta}}\right].$$

Представляет научный интерес найти аналоги (1), (2) для оператора Коши–Трикоми

$$K_b\varphi = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b(x)t}{1-b(x)xt}\right)\varphi(t)dt,\ 0\le b(x)\le 1; \tag{7}$$

аналог равенства (3) для оператора Абеля–Трикоми

$$A_b\varphi = \int_{x}^{1}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b(x)t}{1-b(x)xt}\right)^{\delta}\varphi(t)dt,\ 0<\delta<1;\ 0\le b(x)\le 1; \tag{8}$$

аналог равенства (4) для оператора Гильберта–Трикоми

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\varphi(t)ctg\frac{2\pi^2[1+b(x)](t-x)[4\pi^2-b(x)tx]}{[4\pi^2+t^2b(x)][4\pi^2+x^2b(x)]}dt,\ 0\le b(x)\le 2\pi; \tag{9}$$

аналог равенства (6) для решения $\varphi=\varphi(x),\ 1\le x\le 1$ обобщенного уравнения Абеля–Трикоми.

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{t-x}-\frac{b(x)t}{1-b(x)xt}\right|^{\delta}\varphi(t)dt = f(x),\ 0\le b(x)\le 1$$

или ненарушающего общности его упрощенного варианта

$$\int_{-1}^{1}\frac{[1-b(x)t]^2\varphi(t)dt}{|t[1+x^2b(x)]-x[1+t^2b(x)]|^{\delta}} = f(x),\ 0\le b(x)\le 1. \tag{10}$$

Настоящая статья посвящена решению этой проблемы.

Теорема 1. Если функция *b = b(x)* дифференцируема и *xb'(x)* ≥ 0, 0 ≤ *b* ≤ 1 при –1 ≤ *x* ≤ 1, то для операторов (7), (8) справедливы, аналогичные (1), (2), (3) равенства

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{T}(t,x,b)dt \int_{-1}^{1} T(t,x,b)\varphi(t,\tau)d\tau =$$

$$= -\pi^2\varphi(x,x) + \int_{-1}^{1} d\tau \int_{-1}^{1} T(t,x,b)T(\tau,t,b)\varphi(t,\tau)dt, \tag{11}$$

$$\int_{-1}^{1} T(t,\ x,\ b)dt \int_{-1}^{1} T(\tau,t,b)d\tau = \frac{1}{2}\left[ln^2\frac{(1-x)(1-xb)}{(1+x)(1+xb)}\right] - \pi^2, \tag{12}$$

$$\int_{x}^{1} T^{\alpha}(t,x,b)k_1(t)dt \int_{t}^{1} T^{\beta}(\tau,t,b)\varphi(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{B(1-\alpha,1-\beta)}{(1+x^2b)^{1-\beta}}\int_{x}^{1} T^{\alpha+\beta-1}(\tau,x,b)k_2(\tau)\varphi(\tau)d\tau, \tag{13}$$

где

$$T(t,x,b) = \frac{1-t^2b}{t[1+x^2b]-x[1+t^2b]},\quad K_1(t) = \frac{[1-t^2b]^{1-\alpha}}{[1+t^2b]^{2-\alpha-\beta}},\ K_2(t) = \left[\frac{1-\tau^2b}{[1+\tau^2b]}\right]^{1-\alpha},$$

а для решения *φ(x)* уравнения (10) имеет место, аналогичное (6) представление

$$\varphi(x) = \frac{\psi_1(x)}{2\pi}ctg\frac{\pi\delta}{2}\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}\frac{(1-t^2b)\rho(x,t)f(t)dt}{[x(1+t^2b)-t(1+x^2b)]^{1-\delta}} -$$

$$-\frac{\psi_2(x)}{\pi^2}cos^2\left(\frac{\pi\delta}{2}\right)\int_{-1}^{x}\frac{(1-t^2b)z_1(t)F_1(t)dt}{\rho(t)[x(1+t^2b)-t(1+x^2b)]^{1-\delta}}, \tag{14}$$

где

$$\psi_1(x) = \frac{[1+b]^{1-\delta}[1+x^2b]^{\delta}}{[1+b][1-x^2b]+xb'(x)(1-x^2)},\quad \psi_2(x) = \frac{1+b}{1+x^2b},$$

$$\rho(x,t) = \frac{[1+b]^{\delta}[1+x^2b]^{1-\delta}}{1+t^2b}, \rho(t) = [1+t^2b]^{1+\delta},$$

$$Z_1(t) = [(1+t)(1+tb)]^{\frac{1+\delta}{2}}[(1-t)(1-tb)]^{\frac{1-\delta}{2}},$$

$$F_1(t) = \mu(t)\frac{d}{dt}\int_{-1}^{t}\frac{[1-\tau^2b]\mu(t,\tau)d\tau}{[t(1+\tau^2b)-\tau(1+t^2b)]}\int_{\tau}^{1}\frac{(1-b\lambda^2)f(\lambda)d\lambda}{[\lambda(1+\tau^2b)-(1+x^2b)]^{1-\delta}Z_1(\lambda)},$$

$$\mu(t) = \frac{1+t^2b}{1-t^2b},\quad \mu(t,\tau) = \frac{[1+t^2b]^{\delta}}{1+t^2b}.$$

Доказательство. Структура *T(t, x, b)* и равенство

$(t-x)(1-xtb) = \left(\frac{t}{1+t^2b} - \frac{x}{1+x^2b}\right)(1+t^2b)(1+x^2b)$ наводят на мысль о разумности введения в интегралах равенств (10–14) замену переменных согласно формулам:

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \frac{(1+b(x))t}{1+t^2b(x)},\ \ y = y(x) = \frac{(1+b(x))x}{1+x^2b(x)},\ \ \eta = \eta(\tau) = \frac{(1+b(x))\tau}{1+\tau^2b(x)}. \tag{15}$$

Функции $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $y = y(x)$, $\eta = \eta(\tau)$ взаимно-однозначно отображают отрезок [–1, 1] на себя, если переменные *t, x, τ* выразить через *ε, y, η* соответственно соотношениями

$$t\left[1+b+\sqrt{(1+b)^2-4\varepsilon^2b}\right] = 2\varepsilon,\ \ x\left[1+b+\sqrt{(1+b)^2-4y^2b}\right] = 2y,$$

$$\tau\left[1+b+\sqrt{(1+b)^2-4\eta^2 b}\right]=2\eta. \quad (16)$$

При этом однозначную обратимость функции $y = y(x)$, $-1 \leq x \leq 1$, как легко проверить, обеспечивает условие теоремы $xb'(x) \geq 0$.

В результате осуществления в (10–14) замены переменных согласно (15), (16) с учетом того, что при преобразовании функции $F_1(t)$ в ее внутреннем интеграле осуществляют замену переменной интеграции согласно формулам:

$$S=\frac{(1+b)\lambda}{1+\lambda^2 b},\ \lambda=\frac{2s}{1+b+\sqrt{(1+b)^2-4s^2 b}},$$

равенства (11), (12), (13) примут вид (1), (2), (3) соответственно, где

$$\psi(\varepsilon,\eta)=(1+\tau^2 b)\varphi(t,\tau),\ \psi(y,y)=(1+x^2 b)\varphi(x,x),$$

$\psi(\eta)=(1-\tau^2 b)^{\beta-1}(1+\tau^2 b)^{2-\beta}\varphi(\tau)$; уравнение (10) примет вид (5), формула (14) примет вид (6), где $g(y)=(1+x^2 b)^{\delta} f(x)$, $\psi(\varepsilon)=(1+b)^{\delta-1}(1+t^2 b)^{2-\delta}\varphi(t)$, что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 2. Если функция $b = b(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$ дифференцируема и удовлетворяет условию $xb'(x) \geq 0$, а функция $\varphi = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$ такая, что для функции

$$\psi=\psi(y)=\varphi\left(\frac{2\pi y}{\pi(1+b)+\sqrt{\pi^2(1+b)^2-by^2}}\right),\ 0 \leq y \leq 2\pi \quad (17)$$

справедливо (4), то имеет место формула композиции интегралов с ядром Гильберта–Трикоми вида

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\rho(t)\operatorname{ctg}k\,(t,x)dt\int_0^{2\pi}\rho(\tau)\varphi(\tau)\operatorname{ctg}k(\tau,t)d\tau=$$
$$=-\varphi(x)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho(\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad (18)$$

где

$$\rho(s)=\frac{4\pi^2(1+b)(4\pi^2-bs^2)}{(4\pi^2+bs^2)^2},\ k(\tau,s)=\frac{2\pi^2(1+b)(\tau-s)(4\pi^2-b\tau s)}{(4\pi^2+b\tau^2)(4\pi^2+bs^2)}.$$

Доказательство. Имеет место равенство

$k(\tau,s)=\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi^2(1+b)\tau}{4\pi^2+b\tau^2}-\frac{4\pi^2(1+b)s}{4\pi^2+bs^2}\right)$, что наводит на мысль ввести в (18) замену переменных согласно формулам

$$\varepsilon=\varepsilon(t)=\frac{4\pi^2(1+b)t}{4\pi^2+bt^2},\ y=y(x)=\frac{4\pi^2(1+b)x}{4\pi^2+bx},\ \eta=\eta(\tau)=\frac{4\pi^2(1+b)\tau}{4\pi^2+b\tau^2}, \quad (19)$$

так как обратные преобразования можно определить равенствами

$$t=t(\varepsilon)=\frac{2\pi\varepsilon}{\pi(1+b)+\sqrt{\pi^2(1+b)^2-\varepsilon^2 b}},\quad x=x(y)=\frac{2\pi y}{\pi(1+b)+\sqrt{\pi^2(1+b)^2-y^2 b}},$$
$$\tau=\tau(\eta)=\frac{2\pi\eta}{\pi(1+b)+\sqrt{\pi^2(1+b)^2-\eta^2 b}}, \quad (20)$$

которые осуществляют взаимно-однозначное отображение отрезка $[0, 2\pi]$ на себя.

Условие теоремы $xb'(x) \geq 0$ обеспечивает однозначную обратимость функции $y = y(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

В результате осуществления замены переменных согласно (19), (20) формула (18) примет вид (4), где функция $\psi = \psi(y)$, $0 \leq x \leq 2\pi$ определяется равенством (17), что и завершает доказательство теоремы.

Известно [15, с. 191–194], что решение $\psi(y)$ интегрального уравнения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\varepsilon)d\varepsilon}{|\varepsilon-y|^{1-\alpha}} = g(y),\ 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{21}$$

представимо в виде

$$\psi(y) = \frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(y)-g(\varepsilon)}{|\varepsilon-y|^{1+\alpha}} d\varepsilon, \tag{22}$$

если $0 < \alpha < 1$ и выполнено условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|^p dy < +\infty, \quad 1 < p < \frac{1}{\alpha}, \tag{23}$$

и в виде

$$\psi(y) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{\varepsilon-y}, \tag{24}$$

если $\alpha = 0$.

Возникает научный интерес найти решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения

$$\int_{-a}^{a} \left|\frac{1}{t-x} + \frac{t}{a^2+xt}\right|^{1-\alpha} \varphi(t)dt = f(x), \quad 0 \leq \alpha < 1, \tag{25}$$

которое в предельном случае при $a \to +\infty$ совпадает с (21).

Теорема 3. Решение $\varphi(x)$ уравнения (25) имеет представление

$$\varphi(x) = \frac{\alpha(a^2+x^2)^\alpha}{2\pi} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2} \int_{-a}^{a} \frac{(a^2+t^2)\left[(a^2-x^2)^{1-\alpha} f(x) - (a^2-t^2)^{1-\alpha} f(t)\right]dt}{(a^2-t^2)^{1-\alpha}|(t-x)(a^2+xt)|^{1+\alpha}}, \tag{26}$$

если $0 < \alpha < 1$ и выполнено условие

$$\int_{-a}^{a} (a^2+x^2)\,(a^2-x^2)^{p(1-\alpha)-2} |f(x)|^p dx < +\infty,\ 1 < p < \frac{1}{\alpha}, \tag{27}$$

и представление

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-a}^{a} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{t}{a^2+xt}\right) f(t)dt, \tag{28}$$

если $\alpha = 0$.

Доказательство. Осуществляя операцию сложения дробей, уравнение (25) можно переписать в виде

$$\int_{-a}^{a} \frac{(a^2+t^2)^{1-\alpha} f(t)}{|t(a^2-x^2)-x(a^2-t^2)|^{1-\alpha}} = f(x),\ 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{29}$$

В силу очевидного равенства

$$t(a^2-x^2) - x(a^2-t^2) = \left(\frac{t}{a^2-t^2} - \frac{x}{a^2-x^2}\right)(a^2-t^2)(a^2-x^2),$$

как и при доказательстве теоремы 2, в (29) можно осуществить замену переменных согласно формулам

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \frac{t}{a^2-t^2}, \quad y = y(x) = \frac{x}{a^2-x^2}, \tag{30}$$

так как обратные преобразования вида

$$t = t(\varepsilon) = \frac{2a^2\varepsilon}{1+\sqrt{1+4a^2\varepsilon^2}}, \quad x = x(y) = \frac{2a^2y}{1+\sqrt{1+4a^2y^2}} \tag{31}$$

осуществляют взаимно-однозначное отображение отрезка $[-a, a]$ на интервал $(-\infty, +\infty)$.

В результате замены (30), (31) уравнение (29) примет вид (21), где

$$\psi(\varepsilon) = (a^2 + t^2)^{-\alpha}(a^2 - t^2)^{1+\alpha}\varphi(t), \;\; g(y) = (a^2 - x^2)^{1-\alpha}f(x). \qquad (32)$$

Переходя в (22), (23), (24) к переменным *t, x* согласно (30) и учитывая при этом (32), получим соответственно равенства (26), (27), (28), что и завершает доказательство теоремы.

Из доказательства теоремы 3 видно, что вместо (21), (25) можно рассматривать уравнения

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi(\varepsilon)d\varepsilon}{(\varepsilon-y)^{1-\alpha}} = g(y), \;\; 0 \le \alpha \le 1, \quad 0 < y < +\infty, \qquad (33)$$

$$\int_0^{a} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{t}{a^2+xt}\right)^{1-\alpha} \varphi(t)dt = f(x), \quad 0 \le \alpha < 1, \; 0 < x < +\infty. \qquad (34)$$

Решения (33), (34) при $0 < \alpha < 1$ будут иметь такой же вид, что и (22), (26), где интегрирование совершается на интервале $(0, +\infty)$, а при $\alpha = 0$ определяются равенствами

$$\psi(y) = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{y}{\varepsilon}}\frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{\varepsilon-y}, \quad \varphi(x) = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x(a^2-t^2)}{t(a^2-x^2)}}\left(\frac{1}{t-x} + \frac{t}{a^2+xt}\right) f(t)dt.$$

В заключение отметим, что операторы Коши–Трикоми, Абеля–Трикоми, Гильберта-Трикоми в случае постоянного параметра $b = b(x) = \mathrm{const}$ были впервые рассмотрены и изучены в работах [3–10].

Полученные в этой статье результаты достаточно легко можно переносить на случай функционального параметра $b = b(x)$, который удовлетворяет условию $xb'(x) \ge 0$.

Из исследований последних лет, посвященных проблемам теории сингулярных операторов и сингулярных интегральных уравнений, близких к исследованию в настоящей статье, следует отметить работы [1; 11; 14; 16; 17].

Литература

1. *Абдуллаев А.А., Эргашев Т.Г.* Задача Пуанкаре–Трикоми для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа второго рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2020. – № 65. – С. 5–21.

2. *Гахов Ф.Ж.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

3. *Зайнулабидов М.М., Зайнулабидова З.М.* Об одном интегральном уравнении со степенным ядром с особенностью типа Трикоми и его некоторые приложения // Функциональные и прикладные проблемы математики и информатики: материалы XII Международной конференции. – Махачкала, 2017. – С. 75–78.

4. *Зайнулабидов М.М., Зайнулабидов Г.М., Зайнулабидова З.М.* Подготовка магистров к поиску и решению научных проблем математики // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. – 2017. – Т. 11, № 3. – С. 105–109.

5. *Зайнулабидов М.М., Зайнулабидов Г.М., Зайнулабидова З.М.* Об интегральных преобразованиях с обобщенными ядрами Абеля и о связи особых интегралов с обобщенными ядрами Абеля и Коши–Трикоми // Известия Дагестанского государственного

педагогического университета. Естественные и точные науки. – 2018. – Т. 12, № 2. – С. 5–9.

6. *Зайнулабидов М.М., Зайнулабидов Г.М., Зайнулабидова З.М.* К проблеме подготовки магистров-математиков к научно-исследовательской работе // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. – 2018. – Т. 12, № 2. – С. 51–55.

7. *Зайнулабидов М.М., Зайнулабидов Г.М., Зайнулабидова З.М.* О сингулярных операторах с ядрами Абеля–Трикоми, Коши–Трикоми, Гильберта–Трикоми и связанных с ними преобразованиях и равенствах // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. – 2018. – Т. 12, № 3. – С. 5–9.

8. *Зайнулабидов М.М., Зайнулабидова З.М.* О новых интегральных уравнениях с подвижной и точечной особенностями в ядрах, могущие быть математическими моделями динамических процессов // Информационные технологии в образовании и науке (ДАГИТО–2018): материалы IX Региональной конференции. – Махачкала, 2018. – С. 148–153.

9. *Зайнулабидов М.М., Шихшинатова М.М.* Об оценках для сингулярного интегрального оператора с обобщенным ядром Коши–Трикоми и его приращениях // Вестник Дагестанского государственного университета. Сер. 1: Естественные науки. – 2019. – Т. 34, вып. 4. – С. 53–59.

10. *Зайнулабидов М.М., Зайнулабидова З.М.* О некоторых равенствах, выражающих связь интегральных операторов типа Абеля–Трикоми и Коши–Трикоми специального вида // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Естественные и точные науки. – 2019. – Т. 13, № 1. – С. 11–14.

11. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения: введение в теорию. – М.: Стереотип, 2019. – 304 с.

12. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 510 с.

13. *Михлин С.Г.* Интегральные уравнения. – М.–Л.: ОГИЗ, ГИТЛ, 1949. – 378 с.

14. *Плещинский Н.Б.* Сингулярные интегральные уравнения со сложной особенностью в ядре: монография. – Казань, 2018. – 160 с.

15. *Полянин А.Д., Манжиров А.В.* Справочник по интегральным уравнениям, – М.: Физматгиз, 2003. – 608 с.

16. *Полосин А.А.* Краевые задачи для уравнений эллиптического и смешанного типов и сингулярные интегральные уравнения: автореф. дис. … д. физ.-мат. наук. – М.: Изд-во МГУ, 2018.

17. *Юлдашев Т.К., Солодова О.В.* Об одном интегро-дифференциальном уравнении типа Вольтерра с нелинейной правой частью // Решетневские чтения, Т. 2 / СибГАУ. – Красноярск, 2015. – С. 136–138.

Поступила в редакцию 26 октября 2020 г.

UDC 517.968

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-7–14

On the Laws of Composition of Singular Integrals With Kernels Cauchy–Tricomi, Abela–Tricomi, Hilbert–Tricomi with Functional Parameters and on the Solution of Some Integral Equations With Such Kernels

M.M. Zainulabidov, Z.M. Zainulabidova, M.M. Shikhshinatova

Dagestan State Pedagogical University; Russia, 367003, Makhachkala, M. Yaragsky st., 57; shichmum_2006@mail.ru

In finding solutions of singular integral equations with Cauchy, Abel, and Hilbert kernels, a certain role is played by the formula for the permutation of the integration order of Poincaré–Bertrand for integrals with the Cauchy kernel and the formula for the composition of integrals with Abel and Hilbert kernels.

The goal of research is to obtain similar formulas for integrals and integral equations with Cauchy–Tricomi, Abel–Tricomi, and Hilbert–Tricomi kernels with functional parameters in terms of generalizing the known results.

The transformation method of research reduces the studied problem to the previously studied.

In this paper, we find substitutions of variables that reduce operators with Cauchy–Tricomi, Abel–Tricomi, and Hilbert–Tricomi kernels to operators with Cauchy, Abel, and Hilbert kernels with other densities, which allows us to solve the problem using the known results and passing to the original variables.

Using the formulas obtained, solutions of the generalized integral equation with an Abel–Tricomi kernel with a functional parameter and some other equations are found. The main results of the research are the Poincare-Bertrand formula for integrals with Cauchy–Tricomi kernels; formulas for compositions of integrals with Abel–Tricomi and Hilbert–Tricomi kernels with functional parameters; formulas for solutions of the generalized Abel–Tricomi equation and some other equations with Cauchy–Tricomi and Hilbert–Tricomi kernels.

Based on the results obtained, we can conclude that the results associated with the formula for the permutation of the order of integration of Poincaré–Bertrand for integrals with the Cauchy kernel and with formulas for the composition of integrals with the Abel and Hilbert kernels can be generalized to operators with the Cauchy–Tricomi, Abel–Tricomi kernels, Hilbert–Tricomi with functional parameters.

Keywords: *formula for permutation of the order of integration of Poincaré–Bertrand for integrals with the Cauchy–Tricomi kernel; formulas for compositions of integrals with Abel–Tricomi and Hilbert-Tricomi kernels; solution of the generalized Abel–Tricomi equation; Cauchy–Tricomi, Abel–Tricomi, Hilbert–Tricomi operators with functional parameters.*

Received 26 October 2020