УДК 517.929.4+519.21

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-1-24–33

***Р.И. Кадиев*[1, 2]*, З.И. Шахбанова*[1]**

Устойчивость решений одной гибридной системы Ито с последействием по части переменных относительно начальных данных

[1] *Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а;*

[2] *Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН; 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45*; *kadiev_r@mail.ru*

Исследуются вопросы моментной устойчивости решений системы Ито, состоящей из линейного дифференциального и линейного разностного уравнений Ито с последействием по первой компоненте относительно начальных данных. Для этого применяется метод вспомогательных уравнений, разработанный Н.В. Азбелевым и его учениками для исследования вопросов устойчивости решений линейных детерминированных функционально-дифференциальных уравнений. Получены достаточные условия устойчивости и экспоненциальной устойчивости решений исследуемой системы по первой компоненте в терминах параметров уравнений системы.

Ключевые слова: *устойчивость решений по части переменных, дифференциальные и разностные уравнения Ито, метод вспомогательных уравнений.*

Введение

В настоящее время все больший интерес у исследователей вызывают процессы и системы, математические модели которых описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями и разностными уравнениями с последействием, параметры которых – случайные функции времени. Среди таких систем выделяют класс так называемых гибридных систем, отличительной особенностью которых является наличие в пространстве состояний двух компонент: дискретной и непрерывной. Поскольку одним из основных условий физической реализуемости процесса является его устойчивость, то изучение таких процессов привело к необходимости создания соответствующего направления в теории устойчивости.

Многие реальные процессы в природе и технике имеют последействие, т. е. их поведение определяется состоянием не только в текущий момент времени, но и в предшествующие моменты времени. Примеры показывают, что поведение решений систем без учета запаздывания (даже при малой его величине) может существенно отличаться от поведения решений тех же систем с запаздывающим аргументом. Это обстоятельство подчеркивает необходимость учета запаздывания при составлении математической модели процессов и принципиальную важность изучения систем с запаздыванием.

Системы с запаздыванием начали активно изучаться в России сравнительно недавно. Первые работы в этом направлении связаны с именами Л.Э. Эльсгольца, А.Д. Мышкиса, Г.А. Каменского, С.Б. Норкина, Н.Н. Красовского, В.С. Разумихина и др. Перечень их публикаций можно найти в монографии [1]. Существенный вклад в развитие теории дифференциальных уравнений с последействием внесли также

В.Б. Колмановский, В.Р. Носов, Л.Е. Шайхет, Д.Г. Кореневский, Д.Я. Хусаинов и ряд других ученых. Перечень публикаций этих авторов можно найти в монографии [2].

Проблемам устойчивости решений детерминированных линейных гибридных систем с последействием посвящено крайне мало работ. В работе В.М. Марченко и Ж.Ж. Луазо [3] исследована задача об устойчивости решений стационарных линейных гибридных дифференциально-разностных систем. В работе Ларионова А.С. и Симонова П.М. [4] изучена устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием. Вопросы устойчивости решений для гибридных систем линейных дифференциальных и разностных уравнений Ито другими авторами, по-видимому, не исследовались.

В [5] были исследованы вопросы моментной устойчивости решений для системы Ито, состоящей из линейного дифференциального и линейного разностного уравнений Ито с последействием относительно начальных данных. В настоящей работе изучаются некоторые вопросы моментной устойчивости решений этой системы по первой компоненте по отношению к начальным данным. Исследования проведены методом модельных или вспомогательных уравнений. Получены достаточные условия устойчивости решений по первой компоненте для исследуемых систем в терминах параметров уравнений систем. Вопросы устойчивости решений для линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями этим методом изучены в [6], а в случае линейных разностных уравнений Ито с последействием – в [7]. Вопросы устойчивости решений для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений по части переменных исследовались в [8; 9].

Предварительные сведения и объект исследования

Пусть: $(\Omega, \Im, (\Im_t)_{t\geq 0}, P)$ – стохастический базис; k^2 – линейное пространство 2-мерных $\Im_0$-измеримых случайных величин; $B_i, i = 2,...,m$ – скалярные стандартные независимые винеровские процессы; $1 \leq p < \infty$; c_p – положительное число, зависящее от p [10, с. 65]; E – обозначение для математического ожидания; $|.|$ – норма вектора в нормированном пространстве R^2; $\|.\|$ –норма $2\times m$-матрицы согласованная с нормой вектора в R^2; $\|.\|_X$ –норма в нормированном пространстве X; μ – мера Лебега на $[0,\infty)$; N – множество натуральных чисел; $N_+ = \{0\} \cup N$; $\overline{E}$ – единичная матрица размерности 2×2.

Пусть в дальнейшем $\overline{x}(t)$, $(t \geq 0)$ – непрерывная компонента вектора состояний системы, $\overline{\overline{x}}(s)$, $(s \in N_+)$ – дискретная компонента вектора состояний системы, $[t]$ – целая часть числа t, $x(t) = \mathrm{col}(\overline{x}(t), \overline{\overline{x}}([t]))$, $(t \geq 0)$ – вектор состояний системы. Заметим, что по дискретной компоненте $\overline{\overline{x}}(s)$, $(s \in N_+)$ вектора состояний системы однозначно определяется $\overline{\overline{x}}([t]))$, $(t \geq 0)$ и наоборот. Поэтому при необходимости вместо $\overline{\overline{x}}(s)$, $(s \in N_+)$ будем пользоваться $\overline{\overline{x}}([t]))$, $(t \geq 0)$.

В данной работе исследуются вопросы моментной устойчивости решений для системы, состоящей из линейного дифференциального и линейного разностного уравнений Ито с последействием по первой компоненте вида:

$$
\begin{gathered}
d\overline{x}(t) = -\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)x(h_{1l}(t))dt + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(t)x(h_{ij}(t))dB_i(t) \quad (t \geq 0), \\
\overline{\overline{x}}(s+1) = \overline{\overline{x}}(s) - \sum_{j=-\infty}^{s} A_1(s,j)x(j)h + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=-\infty}^{s} A_i(s,j)x(j)\big(B_i((s+1)h) - B_i(sh)\big) \quad (s \in N_+)
\end{gathered} \tag{1}
$$

относительно начальных данных

$$x(\zeta) = \varphi(\zeta) \quad (\zeta < 0), \tag{1a}$$

$$x(0) = b, \tag{1b}$$

где:

1. $x(t) = \mathrm{col}(\overline{x}(t), \overline{\overline{x}}([t]))$, $(t \geq 0)$ – 2-мерный неизвестный случайный процесс;

2. $A_{ij} = (a_{ij}^1 . a_{ij}^2)$ – 1×2 – матрица при $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, m_i$, элементами матриц A_{1j}, $j = 1, \ldots, m_1$ являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых почти наверно (п. н.) локально суммируемы, а элементами матриц A_{ij}, $i = 2, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, m_i$ являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых п.н. локально суммируемы с квадратом;

3. h_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, m_i$ – измеримые по Борелю функции, заданные на $[0, \infty)$ такие, что $h_{ij}(t) \leq t$ $(t \in [0, \infty))$ μ – почти всюду, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, m_i$;

4. h – достаточно малое положительное действительное число;

5. $A_i(s,j) = (a_i^1(s,j), a_i^2(s,j))$ – 1×2 –матрица, у которой элементы $\Im_s$-измеримые скалярные случайные величины при $i = 1, \ldots, m$, $j = -\infty, \ldots, s$, $s \in N_+$;

6. $\varphi(\zeta) = col(\varphi_1(\zeta), \varphi_2([\zeta]))(\zeta < 0)$ – 2-мерный $\Im_0$-измеримый случайный процесс с п. н. ограниченными в существенном траекториями;

7. $b \in k^2$.

Определение 1. Под решением системы (1), удовлетворяющим условиям (1a), (1b), понимается случайный процесс $x(t) = \mathrm{col}(\overline{x}(t), \overline{\overline{x}}([t]))$ $(t \in (-\infty, \infty))$, прогрессивно измеримый при $t \geq 0$, $x(\zeta) = \varphi(\zeta)$ $(\zeta < 0)$, $x(0) = col(\overline{x}(0), \overline{\overline{x}}(0)) = b$, и который удовлетворяет системе

$$
\begin{gathered}
\overline{x}(t) = \overline{x}(0) - \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(s)x(h_{1l}(s)) \right) ds + \int_0^t \left(\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(s)x(h_{ij}(s)) \right) dB_i(s) \quad (t \geq 0), \\
\overline{\overline{x}}(s+1) = \overline{\overline{x}}(s) - \sum_{j=-\infty}^{s} A_1(s,j)x(j)h + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=-\infty}^{s} A_i(s,j)x(j)\big(B_i((s+1)h) - B_i(sh)\big) \quad (s \in N_+)
\end{gathered}
$$

P–почти всюду, где первый интеграл – интеграл Лебега, а второй – интеграл Ито.

Пусть в дальнейшем: D^2 – линейное пространство 2-мерных прогрессивно измеримых случайных процессов на $[0, \infty)$, траектории которых п. н. непрерывны справа и имеют пределы слева; D – линейное пространство скалярных прогрессивно измеримых случайных процессов на $[0,\infty)$, траектории которых п. н. непрерывны справа и имеют пределы слева; L^2 – линейное пространство 2-мерных случайных процессов на $(-\infty,0)$, которые не зависят от винеровских процессов $B_i, i=2,...,m$ и имеют п. н. ограниченные в существенном траектории; $\gamma:[0,\infty)\to R^1$ – положительная непрерывная функция.

Используя известные результаты, легко убедиться, что при сделанных предположениях задача (1), (1a), (1b) имеет единственное решение. Обозначим это решение через $x(t,b,\varphi)=col\,(\overline{x}(t,b,\varphi),\ \overline{\overline{x}}([t],b,\varphi))\,(t\in(-\infty,\infty))$. Очевидно, что при $t\geq 0$ имеем $x(.,b,\varphi)\in D^2$. Заметим также, что при нулевых начальных условиях (1a), (1b) задача (1), (1a), (1b) имеет только тривиальное решение. Это решение назовем тривиальным решением системы (1).

Введем следующие обозначения для линейных нормированных подпространств пространств D, k^2, L^2:

$$M_p^\gamma=\{x:x\in D,\|x\|_{M_p^\gamma}\overset{def}{=}\sup_{s\in N_+}\left(E|\gamma(s)x(s)|^p\right)^{1/p}<\infty\}(M_p^1=M_p);$$

$$k_p^2=\{\alpha:\alpha\in k^2,\|\alpha\|_{k_p^{2n}}\overset{def}{=}\left(E|\alpha|^p\right)^{1/p}<\infty\}.$$

$$L_p^2=\{\varphi:\varphi\in L^2,\|x\|_{L_p^\gamma}\overset{def}{=}vrai\sup_{j<0}\left(E|\varphi(j))|^p\right)^{1/p}<\infty\}.$$

Определение 2. Тривиальное решение системы (1) или систему (1) назовем:

– p*-устойчивым* по первой компоненте относительно начальных данных, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для любых $b\in k_p^n$, $\varphi\in L_p^2$ и $\|b\|_{k_p^2}+\|\varphi\|_{L_p^2}<\delta$ будет выполнено неравенство $(E|\overline{x}(t,b,\varphi)|^p)^{1/p}\leq\varepsilon$ для любого $t\geq 0_+$;

– *асимптотически* p*-устойчивым* относительно начальных данных, если оно p-устойчиво относительно начальных данных, и, кроме того, для любых $b\in k_p^n$, $\varphi\in L_p^2$ и $\|b\|_{k_p^2}+\|\varphi\|_{L_p^2}<\delta$ будет выполнено соотношение $\lim_{t\to+\infty}(E|\overline{x}(t,b,\kappa)|^p)^{1/p}=0$;

– *экспоненциально* p*-устойчивым* относительно начальных данных, если найдутся такие числа $\overline{c}>0$, $\beta>0$ что для решения $x(t,b,\phi)$ $(t\in(-\infty,\infty))$ задачи (1), (1a), (1b) при любых $b\in k_p^n$, $\varphi\in L_p^2$ будет выполнено неравенство $(E|\overline{x}(t,b,\varphi)|^p)^{1/p}\leq\overline{c}(\|b\|_{k_p^2}+\|\varphi\|_{L_p^2})\exp\{-\beta t\}$ $(t\geq 0)$.

Определение 3. Систему (1) назовем M_p^γ-устойчивой по первой компоненте относительно начальных данных (или короче M_p^γ-устойчивой по первой компоненте), если для любых $b\in k_p^n$, $\varphi\in L_p^2$ для решения задачи (1), (1a), (1b) $x(t,b,\varphi)$ $(t\in(-\infty,\infty))$ выполняются при $t\geq 0$ соотношение $\overline{x}(.,b,\varphi)\in M_p^\gamma$ и неравенство $\|\overline{x}(.,b,\varphi)\|_{M_p^\gamma}\leq c\left(\|b\|_{k_p^{2n}}+\|\varphi\|_{L_p^2}\right)$ для некоторого положительного числа c.

Нетрудно убедиться в том, что:

1) если $\gamma(t)=1$ $(t\ge 0)$ и система (1) M_p^γ-устойчива по первой компоненте, то она и p-устойчива по первой компоненте относительно начальных данных;

2) если $\gamma(t)\ge\delta$ $(t\ge 0)$ для некоторого $\delta>0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t)=+\infty$ и система (1) M_p^γ-устойчива по первой компоненте, то она и асимптотически p-устойчива по первой компоненте относительно начальных данных;

3) если $\gamma(t)=\exp\{\beta t\}$ $(t\ge 0)$ для некоторого $\beta>0$ и система (1) M_p^γ-устойчива по первой компоненте, то она и экспоненциально p-устойчива по первой компоненте относительно начальных данных.

Метод исследования и основной результат

Как отмечалось во введении, моментную устойчивость тривиального решения системы (1) по первой компоненте по отношению к начальным данным будем исследовать методом модельных или вспомогательных уравнений.

Задачу (1), (1a), (1b) запишем в следующем виде:

$$d\bar{x}(t)=-\sum_{j=1}^{m_1}A_{1j}(t)\hat{x}(h_{1l}(t))dt+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}A_{ij}(t)\hat{x}(h_{ij}(t))dB_i(t)\ +(\mathrm{F}_1\phi)(\mathrm{t})\ \ (t\ge 0), \tag{2}$$

$$\bar{\bar{x}}(s+1)=\bar{\bar{x}}(s)-\sum_{j=0}^{s}A_1(s,j)\hat{x}(j)h+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{s}A_i(s,j)\hat{x}(j)\int\limits_{sh}^{(s+1)h}d\mathrm{B}_i(\zeta)+\ (\mathrm{F}_2\ \phi)(\mathrm{s})\ \ (s\in N_+), \tag{3}$$

$$x(0)=b,$$

где

$$(\mathrm{F}_1\varphi)(\mathrm{t})=-\sum_{j=1}^{m_1}A_{1j}(t)\hat{\varphi}(h_{1l}(t))dt+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}A_{ij}(t)\hat{\varphi}(h_{ij}(t))dB_i(t)\ \ (t\ge 0),$$

$$(\mathrm{F}_2\varphi)(\mathrm{s})=-\sum_{j=-\infty}^{-1}A_1(s,j)\hat{\varphi}(j)h+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=-\infty}^{-1}A_i(s,j)\hat{\varphi}(j)\int\limits_{sh}^{(s+1)h}d\mathrm{B}_i(\zeta)\ \ (s\in N_+),$$

$\hat{x}(t)$ – неизвестный 2-мерный случайный процесс на $(-\infty,\infty)$ такой, что $\hat{x}(t)=0$ при $t<0$, $\hat{x}(t)=col\,(\bar{x}(t),\bar{\bar{x}}([t]))$ при $t\ge 0$ и $\hat{\varphi}(t)$ – известный 2-мерный случайный процесс на $(-\infty,\infty)$ такой, что $\hat{\varphi}(t)=\varphi(t)$ при $t<0$ и $\hat{\varphi}(t)=0$ при $t\ge 0$.

Рассмотрим вспомогательную систему линейных обыкновенных дифференциального и разностного уравнений вида

$$\begin{aligned} d\bar{x}(t)&=(B(t)\,\bar{x}(t)+f_1(t))dt \qquad (t\ge 0),\\ \bar{\bar{x}}(s+1)&=\bar{\bar{x}}(s)+(\sum_{j=0}^{s}B(s,j)\bar{\bar{x}}(j)+f_2(s))h \quad (s\in N_+), \end{aligned} \tag{4}$$

где $B(t)$ – некоторая измеримая по Борелю локально суммируемая функция на $[0,\infty)$, $f_1(t)$ – прогрессивно измеримый скалярный случайный процесс на $[0,\infty)$ с п.н. локально суммируемыми траекториями, h – достаточно малое положительное действительное число, $\mathrm{B}(s,j) = -a_1^2(s,j)h + \sum_{i=2}^{m} a_i^2(s,j) \int_{sh}^{(s+1)h} d\mathrm{B}_i(\zeta)$, $f_2(s)$ – некоторая скалярная $\mathfrak{I}_s$ - измеримая случайная величина при $s \in N_+$.

Лемма 1. Для решения системы (4) $x(t) = \mathrm{col}(\overline{x}(t), \overline{\overline{x}}([t]))$, $(t \ge 0)$, проходящей через $x_0 = \mathrm{col}(\overline{x}_0, \overline{\overline{x}}_0)$ имеет место следующее представление

$$\overline{x}(t) = \overline{X}(t)\overline{x}_0 + \int_0^t \overline{X}(t)\overline{X}(\tau)^{-1} f_1(\tau)d\tau \qquad (t \ge 0),$$
$$\overline{\overline{x}}(s) = \overline{\overline{X}}(s,0)\overline{\overline{x}}_0 + \sum_{\tau=0}^{s-1} \overline{\overline{X}}(s,\tau) f_2(\tau)h \qquad (s \in N_+), \tag{5}$$

где $\overline{X}(t)$ – решение уравнения $d\overline{x}(t) = B(t)\,\overline{x}(t)dt \quad (t \ge 0)$, причём $\overline{X}(0) = 1$, $\overline{\overline{X}}(s,\tau)$ $(s,\tau \in N_+, 0 \le \tau \le s)$ – решение уравнения $\overline{\overline{x}}(s+1) = \overline{\overline{x}}(s) + \sum_{j=0}^{s} B(s,j)\overline{\overline{x}}(j)h \quad (s \in N_+)$, причем $\overline{\overline{X}}(s,s) = 1 \ (s \in N_+)$.

Справедливость леммы следует из известных формул для представлений решений линейных обыкновенных неоднородных дифференциальных и разностных уравнений.

В дальнейших записях будем считать, что $\overline{\overline{X}}(s,\tau) = 0$ при $s < 0, \tau \in N_+$.

Используя систему (2) и лемму для первой компоненты решения задачи (2), (3), получим уравнение вида:

$$\overline{x}(t) = X(t)b + (\Theta\overline{x})(t) + (K\varphi)(t) \ \ (t \ge 0), \tag{6}$$

где $X(t)$ – диагональная 2×2-матрица, у которой на главной диагонали находятся $\overline{X}(t)$ и

$$\widetilde{X}(t) = -\int_0^t \overline{X}(t)\overline{X}(\tau)^{-1} \sum_{j=1}^{m_1} a_{1j}^2(\tau)\overline{\overline{X}}([h_{1j}(\tau)],0)d\tau + \int_0^t \overline{X}(t)\overline{X}(\tau)^{-1} \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}^2(\tau)\overline{\overline{X}}([h_{ij}(\tau)],0)d\mathrm{B}_i(\tau),$$

$$(\Theta\overline{x})(t) = \int_0^t \overline{X}(t)\overline{X}(s)^{-1}\left[B(s) - \sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(s)\hat{x}(h_{1j}(s))\right]ds + \int_0^t \overline{X}(t)\overline{X}(s)^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(s)\hat{x}(h_{ij}(s))dB_i(s),$$

$$\hat{x}(t) = \mathrm{col}(\overline{x}(t), \sum_{\tau=0}^{[t-1]} \overline{\overline{X}}([t],\tau+1)\left(-\sum_{j=0}^{\tau} a_1^1(\tau,j)\overline{x}(j) + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{\tau} a_i^1(\tau,j)\overline{x}(j)\int_{\tau h}^{(\tau+1)h} dB_i(\varsigma)\right).$$

$$(K\varphi)(t) = \int_0^t \overline{X}(t)\overline{X}(\tau)^{-1}\left\{-\sum_{j=1}^{m_1} a_{1j}^2(\tau)\sum_{\varsigma=0}^{[h_{1j}(\tau)]-1} \overline{\overline{X}}([h_{1j}(\tau)],\varsigma)(F_2\varphi)(\varsigma) + \right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}^2(\tau)\sum_{\varsigma=0}^{[h_{ij}(\tau)]-1} \overline{\overline{X}}([h_{ij}(\tau)],\varsigma)(F_2\varphi)(\varsigma) + (F_1\varphi)(\tau)\right\}.$$

Приведем следующую теорему, в справедливости которой можно убедиться и непосредственно, используя представление (6) для первой компоненты решения задачи (1), (1a), (1b) (или, что то же самое, задачи (2), (3))

Теорема 1. Пусть для некоторых положительной непрерывной функции $\gamma:[0,\infty)\to R^1$, измеримой по Борелю локально суммируемой функции $B(t)$ и для любых $\bar{x}\in M_p^\gamma$, $\varphi\in L_p^2$, $b\in k_p^2$ имеем, что $X(.)b\in M_p^\gamma$, $\Theta\bar{x}\in M_p^\gamma$, $K\varphi\in M_p^\gamma$, $\| X(.)b\|_{M_p^\gamma}\le c_1\|b\|_{k_p^2}$, $\|\Theta\bar{x}\|_{M_p^\gamma}\le c_2\|\bar{x}\|_{M_p^\gamma}$, $\|K\varphi\|_{M_p^\gamma}\le c_3\|\varphi\|_{L_p^2}$, где c_1,c_2,c_3 – некоторые положительные числа и $c_2<1$. Тогда система (1) M_p^γ-устойчива по первой компоненте.

Достаточные условия устойчивости

Пример. Рассмотрим частный случай системы (1), систему вида

$$\begin{aligned}&d\bar{x}(t)=(-a_{11}\bar{x}(t)+a_{12}\bar{\bar{x}}([t]))dt+(b_{11}\bar{x}(t)+b_{12}\bar{\bar{x}}([t]))dB(t)\quad(t\ge 0),\\&\bar{\bar{x}}(s+1)=\bar{\bar{x}}(s)-a_{22}\bar{\bar{x}}(s)h\quad(s\in N_+),\end{aligned}\tag{6}$$

где h – достаточно малое положительное действительное число, a_{ij}, b_{ij}, $i=1, j=1,2, a_{22}$ – некоторые действительные числа, B – скалярный стандартный винеровский процесс.

Так как система состоит из линейных скалярных обыкновенных дифференциального и разностного уравнений Ито, то в начальных данных отсутствует начальная функция.

В качестве вспомогательной системы (4) возьмем систему

$$\begin{aligned}&d\bar{x}(t)=(-a_{11}\bar{x}(t)+f_1)(t))dt\quad(t\ge 0),\\&\bar{\bar{x}}(s+1)=\bar{\bar{x}}(s)+(-a_{22}\bar{\bar{x}}(s)+f_2(s))h\quad(s\in N_+),\end{aligned}\tag{7}$$

где h, a_{11}, a_{22} те же самые числа, что и в системе (6).

Для системы (7) имеем, $\bar{X}(t)=\exp\{-a_{11}t)$, $\bar{\bar{X}}(s,\tau)=(1-a_{22}h)^{s-\tau}$.

Используя систему (7), задачу (6), (1b) можно записать в эквивалентном виде

$$\bar{x}(t)=X(t)b+(\Theta\bar{x})(t)\quad(t\ge 0),\tag{8}$$

где $X(t)$ диагональная 2×2-матрица, у которой на главной диагонали находятся $\bar{X}(t)$ и

$$\widetilde{X}(t)=\int_0^t\bar{X}(t)\bar{X}(\tau)^{-1}a_{12}\bar{\bar{X}}([\tau],0)d\tau+\int_0^t\bar{X}(t)\bar{X}(\tau)^{-1}b_{12}\bar{\bar{X}}([\tau],0)d\mathrm{B}(\tau),$$

$$(\Theta\bar{x})(t)=\int_0^t\exp\{-a_{11}(t-s)\}b_{11}\bar{x}(s)dB(s).$$

В дальнейшем будем пользоваться следующими леммами, доказанными в [4].

Лемма 2. Пусть $f(s)$ – скалярный случайный процесс, интегрируемый по винеровскому процессу $B(s)$ на отрезке $[0,t]$. Тогда справедливо неравенство

$$\left(E\left|\int_0^t f(s)dB(s)\right|^{2p}\right)^{1/(2p)}\le c_p\left(E\left(\int_0^t|f(s)|^2ds\right)^p\right)^{1/(2p)}.\tag{9}$$

Лемма 3. Пусть $g(s)$ – скалярная функция на $[0,\infty)$, квадрат которого локально суммируем, $f(s)$ – скалярный случайный процесс такой, что $\sup\limits_{t\geq 0}\left(E|f(t)|^{2p}\right)^{1/(2p)}<\infty$. Тогда справедливы неравенства

$$\sup_{t\geq 0}\left(E\left|\int_0^t g(s)f(s)ds\right|^{2p}\right)^{1/(2p)} \leq \sup_{t\geq 0}\left(\int_0^t |g(s)|ds\right)\sup_{t\geq 0}\left(E|f(t)|^{2p}\right)^{1/(2p)}, \quad (10)$$

$$\sup_{t\geq 0}\left(E\left|\int_0^t g(s)^2(f(s))^2 ds\right|^{p}\right)^{1/(2p)} \leq \sup_{t\geq 0}\left(\int_0^t g(s)^2 ds\right)^{1/2}\sup_{t\geq 0}\left(E|f(t)|^{2p}\right)^{1/(2p)}. \quad (11)$$

Пусть в дальнейшем $a_{11}>0$, $0<a_{22}h<1$, $\gamma(t)=\exp\{\lambda t\}$ $(t\geq 0)$, где $0<\lambda<\min\{a_{11},\ln(1/(1-a_{22}h))\}$. Тогда для уравнения (8) с учетом неравенств (9)–(11) получим

$$\sup_{t\geq 0}\left(E|\gamma(t)X(t)b|^{2p}\right)^{1/(2p)} \leq \sup_{t\geq 0}\left(E\left|\gamma(t)\overline{X}(t)b_1\right|^{2p}\right)^{1/(2p)} + \sup_{t\geq 0}\left(E\left|\gamma(t)\widetilde{X}(t)b_2\right|^{2p}\right)^{1/(2p)} \leq$$

$$\leq\left(E|b_1|^{2p}\right)^{1/(2p)} + \sup_{t\geq 0}\left|\gamma(t)\overline{X}(t)\int_0^t \overline{X}(\tau)^{-1}a_{12}\overline{\overline{X}}([\tau],0)d\tau\right|\left(E|b_2|^{2p}\right)^{1/(2p)} +$$

$$+c_p\sup_{t\geq 0}\left(E\left|\int_0^t(\gamma(t)\overline{X}(t)\overline{X}(\tau)^{-1}b_{12}\overline{\overline{X}}([\tau].0)b_2)^2 d\tau\right|^{p}\right)^{1/(2p)} .\leq\left(E|b_1|^{2p}\right)^{1/(2p)} +$$

$$+C_1\left(E|b_2|^{2p}\right)^{1/(2p)} + c_pC_2\left(E|b_2|^{2p}\right)^{1/(2p)},$$

где $C_1=\left|a_{12}\big/(a_{11}+\ln(1-a_{22h}))\right|$, $C_2=\left|b_{12}\Big/\sqrt{|2(a_{11}+\ln(1-a_{22h}))|}\right|$. Так как $\left(E|b_i|^{2p}\right)^{1/(2p)}\leq\|b\|_{k^2_{2p}}$ в силу предыдущих неравенств при сделанных допущениях для уравнения (8) при любом $b\in k_p^2$ имеем $X(.)b\in M_{2p}^{\gamma}$.

Имеем

$$\sup_{t\geq 0}\left(E\left|\gamma(t)(\Theta\overline{x})(t)\right|^{2p}\right)^{1/(2p)} \leq \sup_{t\geq 0}\left(E\left|\gamma(t)\int_0^t\exp\{-a_{11}(t-s)\}b_{11}\overline{x}(s)dB(s)\right|_1^{2p}\right)^{1/(2p)} \leq$$

$$\leq c_p\sup_{t\geq 0}\left(E\left|\int_0^t(\gamma(t)\exp\{-a_{11}(t-s)\}b_{11}\overline{x}(s))^2 ds\right|^{p}\right)^{1/(2p)} \leq \quad (12)$$

$$\leq c_p\sup_{t\geq 0}\left(\int_0^t(\gamma(t)\exp\{-a_{11}(t-s)\}b_{11}/\gamma(s))^2 ds\right)^{1/2}\sup_{t\geq 0}\left(E\left|(\gamma(t)\overline{x}(t)\right|^{2p}\right)^{1/(2p)}.$$

Так как $0<\lambda<a_{11}$, получим

$$\sup_{t\geq 0}\left(\int_0^t (\gamma(t)\exp\{-a_{11}(t-s)\}b_{11}/\gamma(s)))^2 ds\right)^{1/2} =$$

$$= \sup_{t\geq 0}\left(\int_0^t (\exp\{-(a_{11}-\lambda)(t-s)\}b_{11})^2 ds\right)^{1.2} \leq \frac{|b_{11}|}{\sqrt{2(a_{11}-\lambda)}}. \tag{13}$$

Из неравенств (12) и (13) следует, что при допущенных предположениях для любого $\overline{x}\in M_{2p}^{\gamma}$ имеем $\|\Theta\overline{x}\|_{M_{2p}^{\gamma}} \leq c_2\|\overline{x}\|_{M_{2p}^{\gamma}}$.

Следовательно, справедливо утверждение.

Утверждение. Пусть для системы (7) имеем $a_{11}>0$, $0<a_{22}h<1$, $0<\lambda<\min\{a_{11},\ln(1/(1-a_{22}h))\}$, $\dfrac{c_p\,|b_{11}|}{\sqrt{2(a_{11}-\lambda)}}<1$. Тогда система (1) M_{2p}^{γ}-устойчива при $\gamma(t)=\exp\{\lambda t\}$ $(t\geq 0)$.

Литература

1. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971.
2. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981.
3. *Марченко В.М., Луазо Ж.Ж.* Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 5. – С. 728–740.
4. *Ларионов А.С., Симонов П.М.* Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП) // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 13, № 4. – С. 34–37.
5. *Кадиев Р.И., Шахбанова З.И.* Устойчивость решений одной гибридной системы Ито с последействием относительно начальных данных // Вестник ДГУ. Сер. 1: Естественные науки. – 2020. – Т. 35, вып. 2. – С. 33–42.
6. *Кадиев Р.И., Поносов А.В.* Положительная обратимость матриц и устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями // Дифференциальные уравнения. Т. 53, № 5. – Минск, 2017. – С. 579–590.
7. *Кадиев Р.И.* Устойчивость решений систем линейных разностных уравнений Ито с последействием относительно начальных данных // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 7. – С. 842–850.
8. *Кадиев Р.И.* Допустимость пар пространств по части переменных для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 4. – С. 1–10.
9. *Kadiev R., Ponosov A.* Partial stability of stochastic functional differential equations and the W-transform // The International Journal of Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems (DCDIS) Series A: Mathematical Analysis. – 2014. – Vol. 21, № 1. – P. 1–35.
10. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 23 ноября 2020 г.

UDC 517.929.4+519.21

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-1-24–33

Stability Solutions of One hybrid Ito System with Aftereffect in Terms of Variables Relative to the Initial Data

***R.I. Kadiev*[1, 2]*, Z.I. Shakhbanova*[1]**

[1] *Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a;*
[2] *Dagestan Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 45; kadiev_r@mail.ru*

The problems of the moment stability of solutions of the Ito system consisting of linear differential and linear difference Ito equations with the aftereffect of the first component relative to the initial data are investigated. To do this, we apply the ideas of auxiliary equations method developed by N.V. Azbelev and his students to study the stability of solutions of linear deterministic functional differential equations. Sufficient conditions are obtained for the stability and exponential stability of the solutions of the tested system with respect to the first component in terms of the parameters of the equations of the system.

Keywords: *stability solutions in terms of variables, differential and difference Ito equations, the method of auxiliary equations.*

Received 23 November 2020