УДК 517.512

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-1-15–23

М.С. Алиев

Об одной классификации линейно независимых систем функций

Дагестанский государственный университет; Россия, Республика Дагестан, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; aliev.mingazhudin@yandex.ru

В работе дается определение типа системы непрерывных и линейно независимых на [a, b] функций. Доказаны свойства систем функций различных типов. Доказана теорема: чтобы для каждой непрерывной на $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ функции f(x) любой наименее уклоняющийся от нее полином P(x) обладал не менее σ+1 точечным альтернансом, причем хотя бы для одной функции f(x), по крайней мере, один из наименее уклоняющихся от нее полиномов обладал бы точно σ+1 точечным альтернансом, необходимо и достаточно, чтобы система функций была на $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ типа σ.

Ключевые слова: *функция, определитель, минор, тип системы, альтернанс.*

Непрерывные на $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ функции $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$, для которых определитель

$$\mathrm{D}\begin{pmatrix} u_0 \dots & u_n \\ x_1 \dots & x_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} u_0(x_1) & \dots & u_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_0(x_{n+1}) & \dots & u_n(x_{n+1}) \end{vmatrix} \neq 0$$

для любого набора различных точек $\{x_k\}_{k=0}^n \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, называются системой Чебышева (типа n+1).

Определение. Систему непрерывных и линейно независимых на $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ функций $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$ назовем системой типа σ $(0 \leq \sigma \leq n)$, если:

1) для любого набора точек a $\leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b$ в определителе $\mathrm{D}\begin{pmatrix} u_0 \dots & u_n \\ x_1 & x_{n+1} \end{pmatrix} = 0$ существуют I + 1 строк $(\sigma \leq i \leq n)$, по которым все миноры i + 1 порядка равны нулю;

2) по крайней мере, в одном таком миноре $i+1$ порядка все дополнительные миноры $D_i^j (j = 1, 2, \dots, i+1)$ элементов хотя бы одного столбца отличны от нуля и в ряду $D_1^i, D_2^2, \dots, D_{i+1}^i$ имеется не более i-σ перемен знака, причем найдется набор точек $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$, для которого в этом ряду будет точно i-σ перемен знака.

Тип системы функций Чебышева положим равным n+1.

Свойства линейно независимых систем типа σ.

Теорема 1. Если функции $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$ образуют систему типа σ на$[\mathrm{a}, \mathrm{в}]$, то не более $n + 1 - \sigma$ различных полиномов вида

$\mathrm{D}\begin{pmatrix} u_0 & \dots & u_n \\ x_1 & \dots & x_n\ x \end{pmatrix}$ обращаются в нуль при x = $x^0 \in [a, b], x^0 \neq x_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Доказательство. Так как система $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$ типа $\sigma,$ то при любых $\{x_j\}_{j=1}^{\sigma}$ матрица $\left(u_i(x_j)\right)_{i=0, \dots, n}^{j=1, \dots, \sigma}$ имеет ранг σ. В силу линейной независимости системы $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$

матрица $\left(u_i(x_j)\right)_{i=0,\ldots,n}^{j=1,\ldots,\sigma,\sigma+1}$ хотя бы для одной точки $x_{\sigma+1} \in [a,b]$ должна иметь ранг $\sigma+1$ и так далее. Выберем таким образом точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, для которых

$$\mathrm{D}\begin{pmatrix} u_0 & \ldots & u_n \\ x_1 & \ldots & x_{n+1} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Полиномы $D_i(x) = D\begin{pmatrix} u_0, \ldots & \ldots & u_n \\ x_1 \ldots x_{i-1} & x_{i+1} \ldots & x_{n+1}, x \end{pmatrix} (i = 1, \ldots, n+1)$

различны, исходя из $D_i(x_i) \neq 0$, в то время как $D_j(x_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ $(i \neq j)$. Пусть в точке x^0 обращаются в нуль полиномы $D_r(x^0) = 0$ $\left(r = i+1, \ldots, n+1\right)$. Так как $D_r(x_r) \neq 0$, то в $D_r(x^0)$ первые n строк линейно независимы. Следовательно, n + 1 строка является линейной комбинацией остальных n строк, т. е.

$$u_k(x^0) = \sum_{l=1, l\neq r}^{n+1} c_l u_k(x_l) \; (k = 0, \ldots, n). \tag{1}$$

Фиксируем r и рассмотрим полиномы $D_p(x^0) = 0$ $(p = i+1, \ldots, n+1)$ p≠r. В равенстве $D_p(x^0) = 0$ вместо элементов n+1 строки подставим их выражения из (1). Разлагая полученный определитель на сумму определителей и приравнивая к нулю определители с одинаковыми строками, получим $D_p(x^0) = c_p D_p(x_p) = 0$. Так как $D_p(x_p) \neq 0$, то $c_p = 0$ $(p = i+1, \ldots, n+1, p \neq r)$. Поменяв местами p и r, убедимся, что и $c_r = 0$. Тогда (1) примет вид

$$u_k(x^0) = \sum_{l=1}^{i} c_l u_k(x_l) \;\; (k = 0, \ldots, n). \tag{2}$$

Здесь уже $c_l \neq 0$, иначе соответствующий полином тоже обращался бы в нуль в точке x^0. Равенство (2) равносильно тому, что в

$$D\begin{pmatrix} u_0 \ldots & \ldots & u_n \\ x_1 \ldots x_{i-1} & x_{i+1} \ldots & x_{n+1}, x^0 \end{pmatrix} = 0$$

все определители i + 1 порядка по первым I строкам и n+1 строке равны нулю. По самому выбору точек $x_1, \ldots, x_i$ по первым i строкам существует хотя бы один минор i-порядка по некоторым $t_1, \ldots, t_i$ столбцам, неравный нулю. Тогда в определителе i + 1 порядка

$$D\begin{pmatrix} u_{t_1}, \ldots & \ldots u_{t_i} & u_{t_{i+1}} \\ x_1 \ldots x_{i-1} & x_i, & x^0 \end{pmatrix} = 0$$

дополнительные миноры элементов последнего столбца будут отличны от нуля. Доказательство этого факта приведем в теореме 2.

Если в равенстве $D_p(x^0) = 0$ $\left(p = r_1, r_2, \ldots, r_{n-i+1}\right)$, то в (2) нулю будут равны соответствующие c_l, остальные рассуждения остаются теми же.

Для завершения доказательства заметим, что по определению типа σ должно быть i ≥ σ и, следовательно, n + 1 – I $\leq n+1-\sigma$.

Пусть $u_0(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ – непрерывные и линейно независимые на сегменте $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ функции. Далее предположим, что рассматриваемые значения аргумента даны в порядке возрастания их индексов.

Теорема 2. Если система функций $\{u_i(x)\}_{i=0}^{n}$ типа σ на $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, то в ряду $D_1^{n+1}, D_2^{n+1}, \ldots, D_{n+2}^{n+1}$ при условии $D_i^{n+1} \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n+2)$ будет не более $\mathrm{n} - \sigma + 1$ перемен знака, где D_i^{n+1} получаются вычеркиванием i строки матрицы

$$\left(u_k(x_i)\right)_{k=0,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n+2}.$$

Доказательство. Существование требуемых в условии теоремы точек показывается как в теореме 1. Пусть система функций

$\{u_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$ типа σ на $[a, b]$, но в ряду $D_1^{n+1}, D_2^{n+1}, \dots, D_{n+2}^{n+1}$ при некотором наборе точек $\{x_i\}_{i=1}^{n+2}$ имеется $n-\sigma+2$ перемен знака.

Для определенности рассмотрим следующее расположение знаков:

A) $\operatorname{sign} D_j^{n+1} = \begin{cases} +1 & j=1,\dots,\sigma \\ (-1)^j & j=\sigma+1,\dots,n+2 \end{cases}$, если $\sigma -$ четное;

B) $\operatorname{sign} D_j^{n+1} = \begin{cases} +1 & j=1,\dots,\sigma \\ (-1)^{j-1} & j=\sigma+1,\dots,n+2 \end{cases}$, если $\sigma -$ нечетное.

Полином $D\begin{pmatrix} u_0 & \dots & u_n \\ x_1 & \dots & x_n, x \end{pmatrix}$ на интервале (x_{n+1}, x_{n+2}) обращается в нуль.Так как

$\operatorname{sign} D\begin{pmatrix} u_0 & \dots & u_n \\ x_1 & \dots & x_{n+1} \end{pmatrix} = \operatorname{sign} D_{n+2}^{n+1} = \begin{cases} (-1)^{n+2} & \text{для случая A)} \\ (-1)^{n+1} & \text{для случая B)}, \end{cases}$

$\operatorname{sign} D\begin{pmatrix} u_0 & \dots & u_n \\ x_1 & \dots x_n & x_{n+2} \end{pmatrix} = \operatorname{sign} D_{n+1}^{n+1} = \begin{cases} (-1)^{n+1} & \text{для случая A)} \\ (-1)^{n} & \text{для случая B)}. \end{cases}$

Рассмотрим полиномы: $D\begin{pmatrix} u_{t_1} \dots & \dots u_{t_i} & u_{t_{i+1}} \\ x_1 \dots x_{j-1}, & x_{j+1} \dots x_{n+1} & x \end{pmatrix}$ $(j=1,2,\dots,n)$. Если какие-нибудь из этих полиномов тоже обращаются в нуль на (x_{n+1}, x_{n+2}), то выделим те $n+1-i$ (по теореме 1 $n+1-i \le n+1-\sigma$) полиномов, которые обращаются в нуль в точке x^0, ближайшей к x_{n+2}.

Для определенности, пусть в точке x^0 обращаются в нуль полиномы:

$$D\begin{pmatrix} u_{t_1} \dots & \dots u_{t_i} & u_{t_{i+1}} \\ x_1 \dots x_{r-1}, & x_{r+1} \dots x_{n+1} & x^0 \end{pmatrix} = 0 \ (r=i+1,\dots,n+1). \tag{3}$$

Тогда полиномы

$D\begin{pmatrix} u_{t_1} \dots & \dots u_{t_i} & u_{t_{i+1}} \\ x_1 \dots x_{j-1} & x_j \dots x_{n+1}, & x \end{pmatrix}$ $(j=1,2,\dots,i)$ не обращаются в нуль на $[x^0, x_{n+2}]$, следовательно, $sign\, D\begin{pmatrix} u_{t_1} \dots & \dots u_{t_i} & u_{t_{i+1}} \\ x_1 \dots x_{j-1} & x_{j+1} \dots x_{n+1} & x^0 \end{pmatrix} =$

$$= sign\, D\begin{pmatrix} u_{t_1} \dots & \dots u_{t_i} & u_{t_{i+1}} \\ x_1 \dots x_{j-1} & x_{j+1} \dots x_{n+1} & x \end{pmatrix} = \operatorname{sign} D_j^{n+1} \ne 0 \ (j=1,\dots,i). \tag{4}$$

Так как $D_{n+2}^{n+1} \ne 0$, то существует минор $D\begin{pmatrix} u_{t_1} & \dots & u_{t_i} \\ x_1 & \dots & x_i \end{pmatrix} \ne 0$.

$$(-1)^{n+1} D\begin{pmatrix} u_0 & \dots & u_n \\ x_1 \dots x_{j-1} x_{j+1} & \dots & x_{n+1} x \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{r=i+1}^{n+1} (-1)^{n+1-r} D\begin{pmatrix} u_0 & \dots & u_n \\ x_1 \dots x_{r-1} x_{r+1} & \dots & x_{n+1} x \end{pmatrix} \frac{D\begin{pmatrix} u_{t_1} & \dots & u_{t_i} \\ x_1 x_{j-1} x_{j+1} & \dots x_i & x_r \end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix} u_{t_1} & \dots & u_{t_i} \\ x_1 & \dots & x_i \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{D\begin{pmatrix} u_{t_1} & \dots & u_{t_i} \\ x_1 x_{j-1} x_{j+1} & \dots x_i & x \end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix} u_{t_1} & \dots & u_{t_i} \\ x_1 & \dots & x_i \end{pmatrix}} D\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{n+1} \\ x_1 & \dots & x_{n+1} \end{pmatrix} \quad (j=1,\dots,i). \tag{5}$$

Подставив в (5) $x=x^0$ из (3) и (4), получим

$(-1)^{n+1-i} \operatorname{sign} D_j^{n+1} = \frac{signD(x_j)}{signD(x^0)} \operatorname{sign} D_{n+2}^{n+1}$ $(j=1,\dots,i)$.

Отсюда

$$\operatorname{sign} D(x_j) = (-1)^{n+1-i} \operatorname{sign} D_{n+2}^{n+1} \operatorname{sign} D(x^0) \operatorname{sign} D_j^{n+1}. \tag{6}$$

У нас $D(x^0) \ne 0$, а из (4) и (6) следует, что и $D(x_j) \ne 0$ $(j=1,\dots,i)$.

Таким образом, мы доказали, что в равном нулю определителе из теоремы 1

$$D\begin{pmatrix} u_{t_1}\cdots & \dots u_{t_i} & u_{t_{i+1}} \\ x_1 \dots x_{i-1,} & x_i & x^0 \end{pmatrix} = 0.$$

Дополнительные миноры элементов последнего столбца отличны от нуля.

Для подсчета количества перемен знака в ряду $D(x_1), D(x_2), \dots, D(x_i), D(x^0)$ положим $\operatorname{sign} \mathrm{D}(x^0) = (-1)^{n+1-i} \operatorname{sign} D_{n+2}^{n+1}$ (если $\operatorname{sign} \mathrm{D}(x^0) = -(-1)^{n+1-i} \operatorname{sign} D_{n+2}^{n+1}$, то в рассматриваемом ряду все знаки меняются на противоположные, что не влияет на количество перемен знака).

Тогда из (6) получим: для случая А)

$$\operatorname{sign} \mathrm{D}(x_j) = \left[\begin{array}{ll} +1 & j = 1, \dots, \sigma \\ (-1)^j & j = \sigma + 1, \dots, i, \end{array}\right.$$

$\operatorname{sign} \mathrm{D}(x^0) = (-1)^{n+1-i}(-1)^{n+2} = (-1)^{i+1}$;

для случая В)

$$\operatorname{sign} \mathrm{D}(x_j) = \left[\begin{array}{ll} +1 & j = 1, \dots, \sigma \\ (-1)^{j-1} & j = \sigma + 1, \dots, i, \end{array}\right.$$

$\operatorname{sign} \mathrm{D}(x^0) = (-1)^{n+1-i}(-1)^{n+1} = (-1)^i$.

В обоих случаях количество перемен знака в ряду миноров

$D(x_1), D(x_2), \dots, D(x_i), D(x^0)$ равно $i - \sigma + 1$, что противоречит определению системы типа σ.

В общем случае, если в точке x^0 нулю равны полиномы

$$\mathrm{D}\begin{pmatrix} u_0 & \dots & u_n \\ x_1 \dots x_{r-1} x_{r+1} & \dots & x_{n+1} x^0 \end{pmatrix} = 0,$$

где r = 1, …, $\alpha_1 - 1, \alpha_1 + 1, \dots, \alpha_{i-1,} \alpha_{i+1,\dots,} n+1$, в формулу (5) надо внести изменения: вместо первого слагаемого и знаменателя появятся

$$(-1)^{n+1-\alpha_j+i-j}\mathrm{D}\begin{pmatrix} u_0 & \dots & u_n \\ x_1 \dots x_{\alpha_j-1} x_{\alpha_j+1} & \dots & x_{n+1} x \end{pmatrix} \text{ и } \mathrm{D}\begin{pmatrix} u_{t_1} & \dots & u_{t_i} \\ x_{\alpha_1} & \dots & x_{\alpha_i} \end{pmatrix},$$

остальные определители изменятся соответственно.

При x=x^0 из аналога формулы (5) получим

$\operatorname{sign} \mathrm{D}\left(x_{\alpha_j}\right) = (-1)^{n+1-i} \operatorname{sign} D_{n+2}^{n+1} \operatorname{sign} \mathrm{D}(x^0) \operatorname{sign} (-1)^{\alpha_j+j} D_{\alpha_j}^{n+1}$.

Положим $\operatorname{sign} \mathrm{D}(x^0) = (-1)^{n+1-i} \operatorname{sign} D_{n+2}^{n+1}$, тогда:

для случая А) имеем $\operatorname{sign} \mathrm{D}\left(x_{\alpha_j}\right) = \left[\begin{array}{ll} (-1)^{\alpha_j+j} & \text{при } \alpha_j \le \sigma \\ (-1)^j & \text{при } \alpha_j > \sigma, \end{array}\right.$

$\operatorname{sign} \mathrm{D}(x^0) = (-1)^{i+1}$ (j = 1, 2, …, i);

для случая В) имеем $\operatorname{sign} \mathrm{D}\left(x_{\alpha_j}\right) = \left[\begin{array}{ll} (-1)^{\alpha_j+j} & \text{при } \alpha_j \le \sigma \\ (-1)^j - 1 & \text{при } \alpha_j > \sigma, \end{array}\right.$

$\operatorname{sign} \mathrm{D}(x^0) = (-1)^i$ (j = 1, 2, …, i).

Отсюда следует, что если даже $(-1)^{\alpha_j+j} = \pm 1$ для всех $\alpha_j \le \sigma$, то количество перемен знака в ряду $D\left(x_{\alpha_1}\right), D\left(x_{\alpha_2}\right), \dots, D\left(x_{\alpha_i}\right), D(x^0)$ не меньше i$-\sigma + 1$, т. е. опять получили противоречие.

Наконец, если знаки D_j^{n+1} распределены по любому другому закону, то рассмотрим из них такие два соседних, для которых $D_p^{n+1} D_{p+1}^{n+1} < 0$. В наших рассуждениях в этом случае роль точки x_{n+2} будет играть точка x_{p+1}. Воспользуемся формулами:

$$(-1)^{n+1-\alpha_j+i-j-\beta_{p,\alpha_j}}\ \mathrm{D}\begin{pmatrix} u_0 & \dots & u_n \\ x_1 \dots x_{\alpha_j-1}x_{\alpha_j+1} \dots x_p, x_{p+2} & \dots & x_{n+2}, x \end{pmatrix} +$$

$$+\sum_{r=1, r\neq \alpha_{j,p+1}}^{n+2} (-1)^{n+1-r-\beta_{p,r}} \frac{\mathrm{D}\begin{pmatrix} u_{t_1} & \dots & u_{t_i} \\ x_{\alpha_1 \dots} x_{\alpha_{j-1}} x_{\alpha_{j+1}} & \dots & x_{\alpha_i} x_r \end{pmatrix}}{\mathrm{D}\begin{pmatrix} u_{t_1} & \dots & u_{t_i} \\ x_{\alpha_1} & \dots & x_{\alpha_i} \end{pmatrix}}$$

$$\mathrm{D}\begin{pmatrix} u_0 & \dots & u_n \\ x_1 \dots x_{r-1}x_{r+1} \dots x_p, x_{p+2} & \dots & x_{n+2}, x \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\mathrm{D}\begin{pmatrix} u_{t_1} & \dots & u_{t_i} \\ x_{\alpha_1 \dots} x_{\alpha_{j-1}} x_{\alpha_{j+1}} & \dots & x_{\alpha_i} x_r \end{pmatrix}}{\mathrm{D}\begin{pmatrix} u_{t_1} & \dots & u_{t_i} \\ x_{\alpha_1} & \dots & x_{\alpha_i} \end{pmatrix}}\ \mathrm{D}\begin{pmatrix} u_0 & \dots & u_n \\ x_1 \dots x_p & x_{p+2 \dots} & x_{n+2} \end{pmatrix},$$

(J = 1, …, I), $\qquad \beta_{p,r} = \left[\begin{matrix} 1 \text{ при } \mathrm{p}+1 < r \\ 0 \text{ при } \mathrm{p}+1 < r \end{matrix}\right.$.

Остальные рассуждения остаются теми же.

Теорема 3. Если в ряду $D_{1,}^i D_{2, \dots,}^i D_{i+1}^i$ $\left(D_j^i \neq 0,\ j = 1, 2, \dots, i+1\right)$ будет р $(0 < \mathrm{p} < i)$ перемен знака, то в ряду дополнительных миноров $D_{01,}^i D_{02, \dots,}^i D_{0i+1}^i$ $\left(D_{0j}^i \neq\right.$ $\left.\neq 0,\ j = 1, 2, \dots,\ i+1\right)$ элементов любого другого столбца во всех минорах $i+1$ порядка матрицы

$\begin{pmatrix} u_0(x_{\alpha_1}) & \dots\dots & u_n(x_{\alpha_1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_0(x_{\alpha_{i+1}}) & \dots\dots. & u_n(x_{\alpha_{i+1}}) \end{pmatrix}$ $(\alpha_{1,}\ \alpha_{2, \dots,}\ \alpha_{i+1}$ – номера строк, фигурирующих в условии определения типа σ будет также р перемен знака и при равенстве нулю минора i-го порядка. Все миноры этого порядка по этим столбцам равны нулю.

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы.

Пусть в определителе $\mathrm{D}\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{i+1} \\ x_{\alpha_1} & \dots & x_{\alpha_{i+1}} \end{pmatrix} = 0$ все дополнительные миноры j-того столбца отличны от нуля. Отсюда следует

$$\sum_{k=1}^{i+1} c_k u_h(x_{\alpha_k}) = 0,\ c_k \neq 0\ \ (h = 1, \dots, i+1). \tag{7}$$

Действительно, если $\mathrm{c_p} = 0,$ то дополнительный минор элемента $u_j(x_{\alpha_p})$ ($1 \leq j \leq i+1,\ \alpha_1 \leq \alpha_p \tau \leq \alpha_{i+1}$), вопреки допущению, будет равен нулю.

Для определенности пусть дополнительный минор $u_0\ (x_{\alpha_1}) - \mathrm{D}(x_{\alpha_1})$=0, но дополнительный минор $\mathrm{D}(x_{\alpha_2})$ элемента того же столбца $u_0\ (x_{\alpha_2})$ отличен от нуля. Из равенства (7) имеем $u_h(x_{\alpha_2}) = \sum_{k=1, k\neq 2}^{i+1} c_k^0\, u_h(x_{\alpha_k}),$ (h=1, 2, …, i+1, $c_k^0 = -\frac{c_k}{c_2}$).

Подставим эти значения в $\mathrm{D}(x_{\alpha_1}) = 0$ и представим в виде суммы определителей. Приравнивая к нулю определители с одинаковыми строками, получим $\mathrm{c}_1^0\ \mathrm{D}(x_{\alpha_2}) = 0.$ Отсюда $\mathrm{c}_1^0 = 0, \mathrm{c}_1 = 0$, что невозможно.

Первая часть теоремы следует из линейной зависимости строк матрицы, и $\mathrm{c_к}$ пропорциональны минорам по любым i столбцам матрицы.

$\mathrm{P}(x)$=$\sum_{k=0}^{n} c_k u_k\,(x)$, реализующий $\min_{P(x)} \max_{[a,b]} |f(x) - P(x)| = L$, называется полиномом, наименее уклоняющимся от функции $\mathrm{f}(x)$.

Теорема 4. Функции $u_0(x), u_2(x), \dots, u_n(x), f(x)$ непрерывны и линейно независимы на $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. Для того чтобы полином P(x) наименее уклонялся от функции $\mathrm{f}(x)$, необходимо и достаточно, чтобы среди точек $[a, b]$, в которых достигается уклонение L, было i+1 точек $\{x_k\}_{k=1}^{i+1}(0 \le i \le n+1)$, для которых выполняются следующие условия:

a) матрица $\begin{pmatrix} u_0(x_1)\, u_1(x_1) \dots & u_n(x_1) & -f(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_9(x_{i+1})\, u_1(x_{i+1}) \dots & u_n(x_{i+1}) & -f(x_{i+1}) \end{pmatrix}$

имеет ранг, равный i+1;

b) каждый базисный минор (т. е. минор i+1 порядка, отличный от нуля) этой матрицы содержит ее последний столбец;

c) среди базисных миноров есть, по крайней мере, один d, у которого все алгебраические дополнения d_j^iэлементов – f(x_j) отличны от нуля;

d) sign $\left[P(x_j) - f(x_j)\right] = \delta sign(dd_j^i)$ $(\delta = \pm 1, j = 1, \dots, i+1)$.

Теорема 5. Для того чтобы для каждой непрерывной на $[a, b]$ функции f(x) любой наименее уклоняющийся от нее полином P(x) обладал не менее σ+1 точечным альтернансом, причем хотя бы для одной функции f(x), по крайней мере, один из наименее уклоняющихся от нее полиномов обладал точно σ+1 точечным альтернансом, необходимо и достаточно, чтобы система $\{u_k(x)\}_{k=0}^{n}$ была на $[a, b]$ типа σ (0≤ $\sigma \le n+1$).

Достаточность. Пусть система $\{u_k(x)\}_{k=0}^{n}$ типа σ и P(x) наименее уклоняется от f(x) на $[a, b]$. Тогда по теореме наименьшее уклонение L=$\max_{a \le x \le b}|f(x) - P(x)|$ достигается в точках $x_1 < x_2 < \dots < x_{i+1}$ $(0 \le i \le n+1)$, для которых выполняются условия критерия a)–d). По критерию

sign$\left[f(x_j) - P(x_j)\right]$=$\delta(-1)^j sign D_j^i$ $(\delta = \pm 1, D_j^i = \pm(-1)^j d_j, j = 1, i+1)$.

По определению системы типа σ и теоремы 2 в ряду $D_1^i, D_2^i, \dots, D_{i+1}^i$

$(\sigma \le i \le n+1)$ не может быть более чем $i - \sigma$ перемен знака.

Следовательно, в ряду $-D_1^i, D_2^i, \dots, (-1)^{i+1} D_{i+1}^i$ будет не менее σ перемен знака. Тогда sign $\left[f(x_j) - P(x_j)\right]$, по крайней мере, в $\sigma + 1$ точках $x_{t_1} < x_{t_2} < \dots < x_{t_{\sigma+1}}$ последовательно меняет знак, т. е. они будут точками альтернанса.

Необходимость. Пусть любой полином P(x), наименее уклоняющийся от функции f(x), обладает не менее $\sigma + 1$ точечным альтернансом. Допустим, что, тем не менее, система $\{u_k(x)\}_{k=0}^{n}$ типа r.

Пусть r< σ. По определению системы типа r существуют точки $(x_j)_{j=1}^{i+1}$, для которых в соответствующем ряду $D_1^i, D_2^i, \dots, D_{i+1}^i$ будет точно i-r перемен знака.

Положим f(a) = sign$\left[-D_1^i\right]$, f(x_j) $= sign\left[(-1)^j D_j^i\right]$ (j=1, …, i+1), f(b) = sign$\left[(-1)^{i+1} D_{i+1}^i\right]$, в остальных точках $[a, b]$ $f(x)$ линейна.

Допустим, что миноры $D_1^i, D_2^i, \dots, D_{i+1}^i$ в матрице $\left(u_k(x_j)\right)_{r=0, \dots, n}^{j=1, \dots, i+1}$ расположены по столбцам с номерами $t_1, \dots, t_i$.

Тогда для любого полинома $P(c, x) = \sum_{k=1}^{n+1} c_k\, u_k(x)$ имеем

$$\begin{vmatrix} u_{t_1}(x_1)\dots & u_{t_i}(x_1) & P(c,x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{t_1}(x_{i+1})\dots & u_{t_i}(x_{i+1}) & P(c,x_{i+1}) \end{vmatrix} =$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} u_{t_1}(x_1)\dots & u_{t_i}(x_1) & u_0(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{t_1}(x_{i+1})\dots & u_{t_i}(x_{i+1}) & u_0(x_{i+1}) \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ \ c_{n+1} \begin{vmatrix} u_{t_1}(x_1)\dots & u_{t_i}(x_1) & u_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{t_1}(x_{i+1})\dots & u_{t_i}(x_{i+1}) & u_n(x_{i+1}) \end{vmatrix} = 0.$$

Действительно, определители при $c_к$ (к = 1, …, i+1) содержат одинаковые столбцы, а остальные определители $i+1$ порядка матрицы

$\left(u_k(x_j)\right)_{r=0,\ \dots,\ n}^{j=1,\ \dots,\ i+1}$, поэтому равны нулю.

С другой стороны,

$$\begin{vmatrix} u_{t_1}(x_1)\dots & u_{t_i}(x_1) & P(c,x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{t_1}(x_{i+1})\dots & u_{t_i}(x_{i+1}) & P(c,x_{i+1}) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{i+1}(-1)^j D_j^i\, P\left(c,x_j\right) = 0. \qquad (8)$$

Рассмотрим наилучшее приближение функции f(x) полиномами $P(c,x)$. Наименьшее отклонение L$=\left|P\left(c,x_j\right) - f(x_j)\right| = \left|P\left(c,x_j\right) - sign(-1)^j D_j^i\right| = 1$, $\left(j = 1,\ 2,\dots,i+1\right)$.

Действительно, допустив L < 1, из предыдущего равенства получим sign$P\left(c,x_j\right) = sign(-1)^j D_j^i$, $\left(j = 1,\ 2,\dots,i+1\right)$, что противоречит (8).

Для P(c, x)$\equiv 0$, L=1, поэтому P(c,x)$\equiv 0$ будет одним из полиномов, наименее уклоняющимся от f(x). Для него имеем sign$\left(P\left(c,x_j\right) - f\left(x_j\right)\right) = -sign(-1)^j D_j^i$.

В ряду $D_1^i, -D_2^i, \dots, (-1)^{i+2}D_{i+1}^i$, в силу допущения, будет r перемен знака.

Следовательно, полином P(c, x)$\equiv 0$ обладает r+1$< \sigma + 1$ очечным альтернансом, что противоречит условию.

По определению типа σ существует система точек $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$, для которой в ряду $D_1^i, D_2^i, \dots, D_{i+1}^i$ будет точно i$-\sigma$ перемен знака. Повторяя только что приведенные рассуждения, найдем функцию, для которой наименее уклоняющийся от нее полином P(c, x)$\equiv 0$ обладает точно σ точечным альтернансом.

Пусть r$> \sigma$. Тогда для любой непрерывной на $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ функции $f(x)$ все наименее уклоняющиеся от нее полиномы обладают не менее $r+1$ точечным альтернансом, то есть не существует $f(x)$, для которого хотя бы один из наименее уклоняющихся от нее полиномов обладает точно $\sigma + 1$ точечным альтернансом, что невозможно.

Замечание. При приближении системой Чебышева матрица а) в Теореме 4 имеет ранг $n+1$ и все дополнительные миноры последнего столбца отличны от нуля и одного знака. В этом случае наличие $n+2$ точечного альтернанса достаточно для того, чтобы соответствующий полином наименее уклонялся от данной функции. При приближении полиномами по линейно независимой системе типа $\sigma(0 \le \sigma \le n)$ подобного критерия уже нет. Если для полинома P(x) точки $x_1, x_{2,\dots,} x_{\sigma+1}$ являются точками альтернанса и, кроме того, матрица $\left\{u_j(x_i)\right\}_{j=1\dots n+1}^{i=1\dots\sigma+1}$ имеет ранг σ, P(x) наименее уклоняется от данной функции.

Замечания относительно структуры многогранника наилучшего приближения. Известно [1], что:

– при приближении функции полиномами по линейно независимой системе типа $\sigma\ (0 \leq \sigma \leq\ n+1)$ наилучшее приближение достигается на минимальном подмножестве точек $x_1, \dots, x_{i+1}\ (\sigma \leq i \leq \mathrm{n}+1)$;

– все полиномы наилучшего приближения данной функции принимают одинаковые значения в точках минимального подмножества;

– многогранник наилучшего приближения будет n мерным;

– все полиномы наилучшего приближения обладают, по крайней мере, $\sigma+1$ точечным альтернансом, что следует из теоремы 5.

Возникает вопрос: не содержатся ли в многограннике наилучшего приближения любой функции наименее уклоняющиеся от нее полиномы, обладающие $\sigma+1, \sigma+2, \dots, n+2$ точечным альтернансом.

Пример 1. Функции $u_1(x) \equiv 1, u_2(x) = x^2$ на $[-2, 3]$ образуют систему типа $\sigma = 1$. При приближении полиномами $\mathrm{P(x)} = \mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2\mathrm{x}^2$ функции

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } \mathrm{x} = -2, 3 \\ 1 \text{ при } \mathrm{x} = -\ 1 \\ -1 \text{ при } \mathrm{x} = 1 \\ \text{линейна в остальных точках } [-2, 3] \end{cases}$$

многогранник наилучшего приближения $\left\{\mathrm{c}\ (1-\ \mathrm{x}^2)\ , -\frac{1}{8} \leq \mathrm{c} \leq \frac{1}{8}\right\}$.

В этом одномерном многограннике один полином $\frac{1}{8}(1-\mathrm{x}^2)$ обладает трехточечным альтернансом ($\mathrm{x}_1 = -1, \mathrm{x}_2 = 1,\ \mathrm{x}_3 = 3$), а все остальные – двухточечным. Если положим $f_1(-2)=\frac{6}{8}$, а в остальном сохраняются те же свойства f(x), то в многограннике наилучшего приближения $f_1(x)$ $\left\{\mathrm{c}\ (1-\ \mathrm{x}^2)\ , -\frac{1}{8} \leq \mathrm{c} \leq \frac{1}{12}\right\}$ все полиномы обладают только двухточечным альтернансом.

Пример 2. Функции $u_1(x) \equiv 1, u_2(x) = x^2, u_3(x) = x^4$ на $[-2, 3]$ образуют систему типа $\sigma = 1.$ При приближении полиномами $\mathrm{P(x)} = \mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2\mathrm{x}^2 + \mathrm{c}_3\mathrm{x}^4$ функции

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} \frac{7}{8} \text{ при } \mathrm{x} = -2 \text{ и } 0 \text{ при } \mathrm{x} = 3 \\ 1 \text{ при } \mathrm{x} = -1 \\ -1 \text{ при } \mathrm{x} = 1 \\ \text{линейна в остальных точках } [-2, 3] \end{cases}$$

многогранник наилучшего приближения

$$\left\{ \begin{gathered} \alpha(1-\mathrm{x}^2), \beta(1-\mathrm{x}^4), t\alpha(1-\mathrm{x}^2) + (1-t)\beta(1-x^4), -\frac{1}{8} \leq \alpha \leq \frac{1}{24}, \\ -\frac{1}{80} \leq \beta \leq \frac{1}{120}, 0 \leq t \leq 1 \end{gathered} \right\}$$

двухмерный и все полиномы обладают только двухточечным альтернансом.

Литература

1. *Зуховицкий С.И.* О приближении действительных функций в смысле П.Л. Чебышева // УМН. – 1956. – Т. 11, вып. 2.

2. *Рамазанов А-Р.К.* Характеризация полинома наилучшего приближения со знакочувствительным весом // Мат. сборник. – 2005. – Т. 196, № 3. – С. 89–118.

3. *Суетин С.П.* Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжениеь // УМН. – 2015. – Т. 70, вып. 5. – С. 121–134.

4. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* Оценка наилучших приближений ограниченных функций со знакочувствительным весом // Вестник ДГУ. – 2015. – Вып. № 6.

5. *Алиев М.С.* Об одной классификации линейно независимых систем функций // Вестник ДГУ. – 2020. – Т. 35, вып. 2. – С. 53–56.

6. *Алиев М.С.* О приближении функций слабой системой Чебышева // Вестник ДГУ. – 2011. – Вып. № 6.

7. *Алиев М.С.* Об одной системе Маркова // Вестник ДГУ. – 2018. – Т. 33, вып. № 4. – С. 80–84.

8. *Алиев М.С.* О наилучшем приближении в пространстве S // Вестник ДГУ. – 2018. – Вып. № 2. – С. 17–21.

9. *Алиев М.С.* Свойства полиномов по одной системе функций // Вестник ДГУ. – 2016. – Т. 31, вып. № 2. – С. 41–45.

10. *Алиев М.С.* Об определителях Вандермонда с двумя вычеркнутыми степенями // Вестник ДГУ. – 2017. – Т. 32, вып. 3. – С. 73–77.

11. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973.

12. *Сеге Г., Полиа Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. – М.: Наука,1978.

Поступила в редакцию 2 марта 2021 г.

UDC 517.512

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-1-15–23

On a Classification of Linearly Independent Systems of Functions

M.S. Aliyev

Dagestan State University; Russia, Republic of Dagestan, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; aliev.mingazhudin@yandex.ru

The paper defines the type of system of continuous and linearly independent functions on [a, b]. The properties of systems of functions of various types are proved. The theorem is demonstrated: for every continuous function f(x) on [a, b], any least evasive polynomial P(x) has the amount of at least σ+1 point alternance, if only for one function f(x), at least one of the least evasive polynomials has exactly σ+1 point alternance, it is necessary and sufficient for the system of functions to be on [a, b] of σ type.

Keywords: *function, determinant, minor, system type, alternance.*

Received 2 March 2021