МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-1-7–14

Ж.А. Балкизов

Краевые задачи для смешанно-гиперболического уравнения

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Институт прикладной математики и автоматизации»; Россия, 360000, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а; Giraslan@yandex.ru

В работе исследованы краевые задачи с данными на противоположных (параллельных) характеристиках для одного смешанно-гиперболического уравнения, состоящего из волнового оператора в одной части области и вырождающегося гиперболического оператора Геллерстедта в другой части. Известно, что задачи с данными на противоположных (параллельных) характеристиках для волнового уравнения в характеристическом четырехугольнике поставлены некорректно. Однако, как показано в данной работе, решение аналогичных задач для смешанно-гиперболического уравнения, состоящего из волнового оператора в одной части области и вырождающегося гиперболического оператора Геллерстедта с порядком вырождения $m > 0$ в другой части области, при определенных условиях на заданные функции существует единственно и выписывается в явном виде.

Ключевые слова: *волновое уравнение, вырождающееся гиперболическое уравнение, уравнение Вольтерра, метод Трикоми, метод интегральных уравнений, методы теории дробного исчисления.*

Введение. Постановка задачи

На евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_{yy} + f(x,y), & y < 0, \\ y^m u_{xx} - u_{yy}, & y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где m – заданное положительное число, $f = f(x,y)$ – заданная функция, $u = u(x,y)$ – искомая функция.

При $y < 0$ уравнение (1) совпадает с неоднородным волновым уравнением

$$u_{xx} - u_{yy} = f(x,y), \tag{2}$$

а при $y > 0$ уравнение (1) является вырождающимся гиперболическим уравнением первого рода и совпадает с уравнением Геллерстедта

$$y^m u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{3}$$

Уравнение (1) рассматривается в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$, где Ω_1 – это область, ограниченная характеристиками:

$$\sigma_1 = AC:\ x + y = 0,$$
$$\sigma_2 = BC:\ x - y = r$$

уравнения (2), выходящими из точек $A=(0,\,0)$ и $B=(r,\,0)$, пересекающимися в точке $C=(r/2,-r/2)$ и отрезком $I=AB$ прямой $y=0$; Ω_2 – область, ограниченная характеристиками:

$$\sigma_3=AD:\ x-\frac{2}{m+2}y^{(m+2)/2}=0,$$

$$\sigma_4=BD:\ x+\frac{2}{m+2}y^{(m+2)/2}=r$$

уравнения (3), выходящими из A и B, пересекающимися в точке $D=(r/2,\,y_D)$, $y_D=\left[\frac{r(m+2)}{4}\right]^{2/(m+2)}$, и отрезком I.

Регулярным в области Ω *решением* уравнения (1) назовем функцию $u=u(x,y)$ из класса $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2)$, $u_x(x,\,0),\,u_y(x,\,0)\in L_1(0,\,r)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u[\Theta_{00}(x)]=\psi_1(x),\qquad 0\le x\le r,\tag{4}$$

$$u[\Theta_{01}(x)]=\psi_2(x),\qquad 0\le x\le r,\tag{5}$$

где $\Theta_{00}(x)=\left(\frac{x}{2};-\frac{x}{2}\right)$, $\Theta_{01}(x)=\left(\frac{x}{2};\left[\frac{m+2}{4}x\right]^{2/(m+2)}\right)$ – аффиксы точек пересечения характеристик, выходящих из точки $(x,\,0)$, с характеристиками AC и AD соответственно, а $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ – заданные на отрезке $[0,\,r]$ функции.

Задача 2. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u[\Theta_{r0}(x)]=\psi_1(x),\qquad 0\le x\le r,\tag{6}$$

$$u[\Theta_{r1}(x)]=\psi_2(x),\qquad 0\le x\le r,\tag{7}$$

где $\Theta_{r0}(x)=\left(\frac{x+r}{2};\frac{x-r}{2}\right)$, $\Theta_{r1}(x)=\left(\frac{r+x}{2};\left[\frac{m+2}{4}(r-x)\right]^{2/(m+2)}\right)$ – аффиксы точек пересечения характеристик, выходящих из точки $(x,\,0)$, с характеристиками BC и BD соответственно, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ – заданные на $[0,\,r]$ функции.

Задача 3. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (4) и (7).

Задача 4. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (5) и (6).

Сформулированная выше *задача 1* является частным случаем задачи Гурса, исследованной в работах [1; 2], а *задача 2* есть частный случай первой краевой задачи, исследованной в работе [3]. Аналог *задачи 4* был исследован в работе [4]. Задачи со смещением для вырождающихся внутри области гиперболических уравнений были исследованы в работах [5–8]. В данной работе найдены решения *задач 3* и *4* с данными на противоположных (параллельных) характеристиках. Известно, что при $m=0$ *задачи 3* и *4* для уравнения (1) поставлены некорректно. Однако, как показано в данной работе, при $m>0$ и при определенных условиях на заданные функции $\psi_1(x),\ \psi_2(x)$ *и* $f(x,y)$ решения *задач 3* и *4* существуют единственно и выписываются в явном виде.

Теорема единственности решения задачи 3

Теорема 1. *Решение задачи 3 единственно.*

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся методом Трикоми. Введем сначала обозначения

$$u\,(x,0)=\tau(x),\qquad 0\le x\le r,\tag{8}$$

$$u_y(x,0)=\nu(x),\qquad 0<x<r.\tag{9}$$

Найдем фундаментальные соотношения между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенные из соответствующих областей Ω_1 и Ω_2 на линию $y=0$. Решение задачи Коши (8), (9) для уравнения (2) выписывается по формуле Даламбера [9, с. 64]:

$$u(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu(t)dt+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y}\int\limits_{x-y+t}^{x+y-t}f(s,t)ds\,dt\,.\tag{10}$$

Удовлетворяя (10) условию (4), найдем

$$u[\Theta_{00}(x)]=\frac{\tau(0)+\tau(x)}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}\nu(t)dt+\frac{1}{2}\int\limits_{-x/2}^{0}\int\limits_{-t}^{x+t}f(s,t)ds\,dt=\psi_1(x).$$

Путем дифференцирования из последнего равенства приходим к соотношению

$$\nu(x)=\tau'(x)-2\psi_1'(x)+\int\limits_{-x/2}^{0}f(x+t,t)dt\,.\tag{11}$$

Соотношение (11) есть основное фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из Ω_1 на линию $I=AB$.

Далее найдем соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из Ω_2 на линию $y=0$. Воспользуемся следующим представлением решения задачи (8), (9) для уравнения (3) (формула Дарбу) [10, с. 45]:

$$u(x,y)=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int\limits_0^1\tau\left[x+(1-2\beta)y^{1/(1-2\beta)}(1-2t)\right]t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt+$$

$$+\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}y\int\limits_0^1\nu\left[x+(1-2\beta)y^{1/(1-2\beta)}(1-2t)\right]t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\,dt\,,\tag{12}$$

где $\beta=\dfrac{m}{2(m+2)}$.

Из (12) при условии (7) находим

$$u[\Theta_{r1}(x)]=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int\limits_0^1\tau[r-(r-x)t]t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt+$$

$$+\frac{\Gamma(2-2\beta)(2-4\beta)^{2\beta-1}}{\Gamma^2(1-\beta)}(r-x)^{1-2\beta}\int\limits_0^1\nu[r-(r-x)t]t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\,dt=\psi_2(x).\tag{13}$$

Под знаками интегралов в последнем равенстве произведем замену переменной интегрирования по формуле $s=r-(r-x)t$. Тогда (13) перепишется в следующей форме:

$$\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}(r-x)^{1-2\beta}\int_x^r \frac{\tau(s)(r-s)^{\beta-1}}{(s-x)^{1-\beta}}ds+\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)(2-4\beta)^{1-2\beta}}\int_x^r \frac{\nu(s)(r-s)^{-\beta}}{(s-x)^{-\beta}}ds=\psi_2(x). \qquad (14)$$

Пользуясь определением оператора D_{cx}^{α} дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегродифференцирования порядка α [11, с. 9]

$$D_{cx}^{\alpha}\varphi(t)=\frac{\operatorname{sgn}(x-c)}{\Gamma(-\alpha)}\int_c^x \frac{\varphi(t)dt}{|x-t|^{\alpha+1}},$$

перепишем равенство (14) в следующем виде:

$$\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}(r-x)^{1-2\beta}D_{rx}^{-\beta}\left[(r-t)^{\beta-1}\tau(t)\right]+\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)(2-4\beta)^{1-2\beta}}D_{rx}^{\beta-1}\left[(r-t)^{-\beta}\nu(t)\right]=\psi_2(x). \qquad (15)$$

Подействовав на обе части равенства (15) оператором $D_{rx}^{1-\beta}$ дробного дифференцирования порядка $(1-\beta)$ и воспользовавшись свойствами композиции операторов дробного дифференцирования и интегрирования с одинаковыми началами [11, с. 18], приходим к соотношению

$$\nu(x)=-\gamma_1 D_{rx}^{1-2\beta}\tau(t)+\gamma_2(r-x)^{\beta}D_{rx}^{1-\beta}\psi_2(t), \qquad (16)$$

где $\gamma_1=\dfrac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)(2-4\beta)^{1-2\beta}}{\Gamma(2-2\beta)\Gamma(\beta)}$, $\gamma_2=\dfrac{\Gamma(\beta)\gamma_1}{\Gamma(2\beta)}$.

Соотношение (16) и есть искомое фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из Ω_2 на линию $I = AB$.

Рассмотрим теперь однородную задачу, соответствующую *задаче 3*, т. е. положим $f(x,y)\equiv 0\ \forall\,(x,y)\in\overline{\Omega}_1$, $\psi_1(x)=\psi_2(x)\equiv 0\ \forall\ x\in[0,r]$. Тогда найденные выше соотношения (11) и (16) перепишутся соответствующим образом

$$\nu(x)=\tau'(x), \qquad (17)$$

$$\nu(x)=-\gamma_1 D_{rx}^{1-2\beta}\tau(t). \qquad (18)$$

Умножая обе части соотношения (17) на функцию $\tau(x)$, а затем интегрируя по x от 0 до r с учетом условий согласования $\tau(0)=\psi_1(0)$, $\tau(r)=\psi_2(r)$, найдем

$$J=\int_0^r \tau(x)\nu(x)dx=\int_0^r \tau(x)\tau'(x)dx=0.$$

С другой стороны, с учетом последнего равенства после аналогичных действий из (18) найдем

$$J=\int_0^r \tau(x)\nu(x)dx=-\gamma_1\int_0^r \tau(x)D_{rx}^{1-2\beta}\tau(t)dx=0. \qquad (19)$$

В силу теоремы о положительности оператора дробного дифференцирования D_{cx}^{α} порядка $\alpha\in[0,1)$ [11, с. 46], равенство (19) может иметь место в том и только в том случае, когда $\tau(x)\equiv 0\ \forall x\in[0,r]$. Но тогда из (17) и (18) следует, что и $\nu(x)\equiv 0\ \forall x\in(0,r)$. При этом из формул (10) и (12) сразу следует, что $u(x,y)\equiv 0$ $\forall\,(x,y)\in\overline{\Omega}$. Теорема 1 доказана.

Теорема о существовании решения задачи 3

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть заданные функции* $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ *и* $f(x,y)$ *обладают теми свойствами, что*

$$f(x,y)\in C(\overline{\Omega}_1),$$
$$\psi_1(x)\in C^2[0,r]\cap C^3\,]0,\,r[\,,$$
$$\psi_2(x)\in C[0,r]\cap C^3\,]0,\,r[\,,$$

причем $\psi_2'(0)$ *может обращаться в бесконечность порядка ниже* 2β; $\psi_2'(r)$ – *в бесконечность порядка ниже* $1-\beta$; $\psi_2''(0)$ – *в бесконечность порядка ниже* 1, *а* $\psi_2''(r)$ – *в бесконечность порядка ниже* β *и выполнено условие согласования*

$$\psi_1(0)=F(0)-\gamma_1\int_0^r t^{2\beta-1}E_{\frac{1}{2\beta}}\left(-\gamma_1 t^{2\beta};2\beta\right)F(t)dt,$$

где $$F(x)=2\psi_1(x)-2\psi_1(r)+\psi_2(r)-\gamma_2\int_x^r (r-t)^{\beta}D_{rt}^{1-\beta}\psi_2(s)dt+\int_x^r\int_{-t/2}^{0}f(t+s,s)ds\,dt,$$

$E_\rho(z;\mu)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}$ – *функция типа Миттаг–Леффлера [12, с. 117].*

Тогда существует регулярное в области Ω *решение задачи 3.*

Для доказательства теоремы 2 вернемся к найденным выше фундаментальным соотношениям (11) и (16). Исключая из (11) и (16) искомую функцию $\nu(x)$, относительно $\tau(x)$ приходим к следующей задаче для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, содержащего производную дробного порядка в младших членах:

$$\tau'(x)+\gamma_1 D_{rx}^{1-2\beta}\tau(t)=2\psi_1'(x)+\gamma_2(r-x)^{\beta}D_{rx}^{1-\beta}\psi_2(t)-\int_{-x/2}^{0}f(x+t,t)dt,\qquad 0<x<r \tag{20}$$

$$\tau(r)=\psi_2(r). \tag{21}$$

Интегрируя уравнение (20) по x от x до r, с учетом (21), придем к соответствующему задачам (20), (21) интегральному уравнению вида:

$$\tau(x)+\frac{\gamma_1}{\Gamma(2\beta)}\int_x^r (t-x)^{2\beta-1}\tau(t)dt=F(x). \tag{22}$$

Уравнение (22) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром $K(x,t)=\dfrac{(t-x)^{2\beta-1}}{\Gamma(2\beta)}$ и правой частью $F(x)$. Функции $K_n(x,t)=\dfrac{(t-x)^{2n\beta+2\beta-1}}{\Gamma(2n\beta+2\beta)}$ являются итерированными ядрами ядра $K(x,t)$, а функция

$$R(x,t;\gamma_1)=(t-x)^{2\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[-\gamma_1(t-x)^{2\beta}\right]^n}{\Gamma(2\beta+2n\beta)}=(t-x)^{2\beta-1}E_{\frac{1}{2\beta}}\left(-\gamma_1(t-x)^{2\beta};2\beta\right)$$

есть резольвента ядра $K(x,t)$. С помощью резольвенты $R(x,\,t;\,\gamma_1)$ ядра $K(x,\,t)$ решение уравнения (22), а следовательно, решение задачи (20),(21) запишется по формуле

$$\tau(x)=F(x)-\gamma_1\int_x^r (t-x)^{2\beta-1}E_{\frac{1}{2\beta}}\left(-\gamma_1(t-x)^{2\beta};2\beta\right)F(t)dt.$$

После того как функция $\tau(x)$ найдена, функцию $\nu(x)$ можно найти из соотношений (11) или (16). Тогда решение исследуемой *задачи 3* в области Ω_1 дается по формуле (10), а в области Ω_2 решение задачи (8), (9) для уравнения (3) выписывается по формуле (12).

Теорема об однозначной разрешимости задачи 4

Перейдем к исследованию *задачи 4*. Справедлива

Теорема 3. Пусть *заданные функции* $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ *и* $f(x,y)$ *таковы, что:*

$$f(x,y)\in C(\overline{\Omega}_1),$$
$$\psi_1(x)\in C^2[0,r]\cap C^3]0,r[,$$
$$\psi_2(x)\in C[0,r]\cap C^3]0,r[,$$

причем $\psi_2'(0)$ *может обращаться в бесконечность порядка ниже* 2β*;* $\psi_2'(r)$ *– в бесконечность порядка ниже* $1-\beta$*;* $\psi_2''(0)$ *– в бесконечность порядка ниже* 1*, а* $\psi_2''(r)$ *– в бесконечность порядка ниже* β *и выполнено условие согласования*

$$\psi_1(r)=F_1(r)+\gamma_1\int_0^r(r-t)^{2\beta-1}E_{\frac{1}{2\beta}}\left(\gamma_1(r-t)^{2\beta};2\beta\right)F_1(t)\,dt,$$

где $F_1(x)=2\psi_1(x)-2\psi_1(0)+\psi_2(0)+\int\limits_0^x\int\limits_{(t-r)/2}^0 f(t-s,s)\,ds\,dt-\gamma_2\int\limits_0^x t^\beta D_{0t}^{1-\beta}\psi_2(s)\,dt$.

Тогда существует единственное регулярное в области Ω *решение задачи 4*.

Действительно, удовлетворяя (10) условию (6) с последующим дифференцированием полученного равенства, найдем

$$\nu(x)=-\tau'(x)+2\psi_1'(x)+\int\limits_{\frac{x-r}{2}}^0 f(x-t,t)\,dt. \tag{23}$$

А из (12) при условии (5) после некоторых преобразований будем иметь

$$\nu(x)=-\gamma_1 D_{0x}^{1-2\beta}\tau(t)+\gamma_2 x^\beta D_{0x}^{1-\beta}\psi_2(t). \tag{24}$$

Исключая из (23) и (24) искомую функцию $\nu(x)$, с учетом (5) и (8) приходим к следующей задаче относительно $\tau(x)$:

$$\tau'(x)-\gamma_1 D_{0x}^{1-2\beta}\tau(t)=2\psi_1'(x)+\int\limits_{\frac{x-r}{2}}^0 f(x-t,t)\,dt-\gamma_2 x^\beta D_{0x}^{1-\beta}\psi_2(t),\quad 0<x<r, \tag{25}$$

$$\tau(0)=\psi_2(0). \tag{26}$$

Решение задачи (25), (26) выписывается по формуле

$$\tau(x)=F_1(x)+\gamma_1\int_0^x(x-t)^{2\beta-1}E_{\frac{1}{2\beta}}\left(\gamma_1(t-x)^{2\beta};2\beta\right)F_1(t)\,dt.$$

Как и при исследовании предыдущей задачи 3, после нахождения функции $\tau(x)$ функцию $\nu(x)$ можно найти из соотношений (23) или (24). Стало быть, решение исследуемой задачи 4 в области Ω_1 выписывается по формуле (10), а в области Ω_2 решение задачи (8), (9) для уравнения (3) находится по формуле (12).

Литература

1. *Кальменов Т.Ш.* Критерий непрерывности решения задачи Гурса для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8, № 1. – С. 41–55.

2. *Балкизов Ж*.А. Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Сер.: Естественные науки. – 2016. – № 1 (189). – С. 5–10.

3. *Балкизов Ж.А.* Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Владикавказский математический журнал. – 2016. – Т. 18, № 2. – С. 19–30.

4. *Кумыкова С.К., Нахушева Ф.Б.* Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 1. – С. 50–65.

5. *Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.* О некоторых краевых задачах для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 1. – С. 129–136.

6. *Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.* О двух нелокальных краевых задачах для вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 116–127.

7. *Ефимова С.В., Репин О.А.* Задача с нелокальными условиями на характеристиках для уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 10. – С. 1419–1422.

8. *Репин О.А.* О задаче с операторами М. Сайго на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Физико-математические науки. – 2006. – Вып. 43. – С. 10–14.

9. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука; МГУ. 2004. – 798 с.

10. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. – М.: Издательство АН СССР, 1959. – 164 с.

11. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

12. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.

Поступила в редакцию 4 декабря 2020 г.

UDC 517.95

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-1-7–14

Boundary Value Problems for a Mixed-Hyperbolic Equation

Zh.A. Balkizov

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Center of RAS; 360000, Russia, Kabardin-Balkar Republic, Nalchik, Shortanov st., 89a; Giraslan@yandex.ru

Within the framework of this research, solutions of boundary value problems with the data on the ‘opposite’ (‘parallel’) characteristics are found for one mixed-hyperbolic equation consisting of a wave operator in one part of the domain and a degenerate hyperbolic Gellerstedt operator in the other part. It is known that problems with the data on the opposite (parallel) characteristics for the wave equation in the characteristic quadrangle are posed incorrectly. However, as the given work shows, the solution of similar problems for a mixed-hyperbolic equation consisting of a wave operator in one part of the domain and a degenerate hyperbolic Gellerstedt operator with an order of degeneracy in the other part of the domain, under certain conditions on the given functions, is unique and is written explicitly.

Keywords: *wave equation, degenerate hyperbolic equation, Volterra equation, Tricomi method, integral equation method, methods of the theory of fractional calculus.*

Received 4 December 2020