УДК 517.929

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-4-27–33

С.М. Алейдаров

Исследование уравнения нейтрального типа в пространствах со степенным весом

Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; seydullaaley@mail.ru

В статье рассматривается уравнение нейтрального типа с линейным отклонением аргумента в гильбертовом пространстве со степенным весом. Наличие линейного отклонения аргумента и переменного коэффициента перед производной не позволяет применить преобразование Фурье для исследования уравнения нейтрального типа. Поэтому при рассмотрении вопросов разрешимости и асимптотики мы использовали преобразование Меллина. Для уравнения нейтрального типа с постоянными операторными коэффициентами получены достаточные условия однозначной разрешимости через резольвенту. Для уравнения нейтрального типа с переменными коэффициентами получены оценки переменных частей, обеспечивающие однозначную разрешимость. Получена асимптотическая оценка всех решений уравнения в случае, когда нет однозначности решения.

Ключевые слова: *нейтральный тип, степенной вес, разрешимость, гильбертово пространство.*

К решению линейного дифференциального уравнения с линейным отклонением аргумента нейтрального типа приводит изучение собственных колебаний в волновой среде с периодически изменяющимися граничными условиями. Такими системами являются, например, оптический резонатор и струна с колеблющейся границей, балки с переменной нагрузкой на конце, а в радиофизике и радиоэлектронике – применяемые в информационных вычислительных и измерительных устройствах волновые системы с периодически изменяющейся ёмкостью на границе.

В статье мы рассматриваем уравнение нейтрального типа

$$L(t)U(t) = \sum_{j=0}^m \{tU'(b_j t) + [A_j + A_j(t)]U(a_j t)\} = f(t) \quad (1)$$

с неограниченными операторными коэффициентами

$$A_j, \quad A_j(t) : Y \rightarrow Y, \quad \mathcal{D}(A_j) = \mathcal{D}(A_j(t)) = X \subset Y, \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

X, Y – гильбертовы пространства, $a_0 = 1$, $0 < a_j, b_j < 1$.

Наличие линейного отклонения аргумента и переменного коэффициента перед производной не позволяет применить преобразование Фурье [1] для исследования уравнения нейтрального типа. Поэтому при рассмотрении вопросов разрешимости и асимптотики мы использовали преобразование Меллина [3].

Будем говорить, что $U(t)$ принадлежит $L_2(R^+, H)$, если $U(t) \in H$ и $\int_0^\infty \|U(t)\|_H^2 \frac{dt}{t} < +\infty$, где H – гильбертово пространство [4].

Пусть $t^\sigma U(t) \in L_2(R^+, H)$. Тогда

$$\tilde{U}(\lambda, a) = \int_{1/a}^a U(t) t^{\lambda-1} dt \quad (Re \lambda = \sigma)$$

сходится в среднем квадратичном на прямой $Re \lambda = \sigma$ к некоторой функции $\tilde{U}(\lambda)$:

$$\tilde{U}(t, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{U}(\lambda) t^{-\lambda} d\lambda.$$

Сходится в среднем к (t) в том смысле, что

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^\infty \|U(t) - U(t, a)\|_H^2 t^{2\sigma-1} dt = 0 \text{ и } \int_0^\infty \|U(t)\|_H^2 t^{2\sigma-1} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \|\tilde{U}(\sigma + it)\|_H^2 dt.$$

Определение 1. Пополнение множества функций $U(t)$, $U(0) = 0$ с компактными носителями и со значениями в X , имеющих сильно непрерывные производные в Y по норме

$$\|U(t)\|^{1,\sigma} = \left(\int_0^\infty t^{2\sigma-1} (\|U(t)\|_x^2 + \|tU'(t)\|_y^2) dt \right)^{1/2}, \quad \sigma > 0,$$

обозначим через $X^{1,\sigma}$.

Определение 2. Пополнение множества сильно непрерывных функций $f(t)$, $f(0) = 0$ с компактными носителями и со значениями в Y по норме

$$\|f(t)\|^{1,\sigma} = \left(\int_0^\infty t^{2\sigma-1} \|f(t)\|_y^2 dt \right)^{1/2}$$

обозначим через $Y^{0,\sigma}$.

Для уравнения нейтрального типа с постоянными коэффициентами

$$LU(t) \equiv \sum_{j=0}^m \{tU'(b_j t) + A_j U(a_j t)\} = f(t) \quad (2)$$

определим понятие резольвенты.

Определение 3. Операторнозначную функцию

$$R(\lambda) = \left(\sum_{j=0}^m \{A_j a_j^{-\lambda} - \lambda b_j^{-\lambda-1}\} \right)^{-1}$$

назовем резольвентой уравнения (2) [8].

Лемма 1. Оператор $L(t) : L(t) : X^{1,\sigma} \rightarrow Y^{0,\sigma}$ из (2) непрерывен.

Доказательство. Пусть $U(t)$ – любой элемент пространства $X^{1,\sigma}$. Оценим квадрат нормы

$$\begin{aligned} (\|L(t)U(t)\|^{0,\sigma})^2 &\leq C_A \cdot (m+1) \sum_{j=0}^m \left(\int_0^\infty \|U(a_j t)\|_x^2 dt + \int_0^\infty t^{2\sigma-1} \|tU'(t)\|_y^2 dt \right) = \\ &= C_A(m+1) \cdot \sum_{j=0}^m \left(\int_0^\infty a_j^{1-2\sigma} t^{2\sigma-1} \|U(a_j t)\|_x^2 dt + b_j^{-2\sigma-2} \cdot \int_0^\infty t^{2\sigma-1} \|tU'(t)\|_y^2 dt \right) \leq \\ &\leq C_A C_{ab} \cdot (m+1) \cdot (\|U(t)\|^{1,\sigma})^2, \end{aligned}$$

где

$$C_A = \max_{j \geq 0, t \geq 0} \|A_j + A_j(t)\|_y, \quad C_{ab} = \max_{j \geq 0} \{a_j^{1-2\sigma}, b_j^{-2\sigma-2}\}.$$

Отсюда следует, что $\|L(t)\|_{X^{1,\sigma} \rightarrow Y^{1,\sigma}} \leq \sqrt{(m+1)C_A C_{ab}}$.

Лемма доказана.

Теорема 1. Для существования и единственности решения $U(t) \in X^{1,\sigma}$ уравнения (2) при любой правой части $f(t) \in Y^{1,\sigma}$ достаточно, чтобы резольвента $R(\lambda)$ была регулярична и $\|R(\lambda)\|_x + |\lambda| \cdot \|R(\lambda)\|_y = 0$ (1) на прямой $\operatorname{Re} \lambda = \sigma$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Применяя к уравнению (2) преобразование Меллина [3], получим

$$\sum_{j=0}^b \{A_j a_j^{-\lambda} - \lambda b_j^{-\lambda-1}\} \tilde{U}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda),$$

$$\tilde{U}(\lambda) = R(\lambda) \tilde{f}(\lambda).$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-\lambda} \tilde{U}(\lambda) d\lambda,$$

где $\tilde{U}(\lambda) = R(\lambda) \tilde{f}(\lambda)$ существует в силу условий теоремы. Докажем сильную непрерывность функции $U(t)$ при $t > 0$. Для простоты положим $\sigma = 0$. Тогда

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^{i\lambda} R(-i\lambda) \tilde{f}(-i\lambda) d\lambda.$$

Оценим норму приращения функции

$$\begin{aligned} \|U(t+h) - U(t)\|_y &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |(t+h)^{i\lambda} - t^{i\lambda}| \cdot \|R(-i\lambda) \tilde{f}(-i\lambda)\|_y d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(t+h)^{i\lambda} - t^{i\lambda}}{\lambda^2} \right| \cdot \|-i\lambda R(-i\lambda) \tilde{f}(-i\lambda)\|_y d\lambda \leq \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|(t+h)^{i\lambda} - t^{i\lambda}|^2}{\lambda^2} d\lambda \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|-i\lambda R(-i\lambda) \tilde{f}(-i\lambda)\|_y^2 d\lambda \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\lambda}{2} \cdot \ln(1 + \frac{h}{t})}{\lambda^2} d\lambda \right)^{1/2} \leq C_1 \sqrt{\ln(1 + \frac{h}{t})}. \end{aligned}$$

Отсюда следует сильная непрерывность функции $U(t)$.

Тот факт, что функция, определяемая равенством, удовлетворяет уравнению, проверяется непосредственной подстановкой. Докажем, что $U(t) \in X^{1,\sigma}$ при $f(t) \in Y^{0,\sigma}$.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{2\sigma-1} \|U(t)\|_x^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|\tilde{U}(\sigma + it)\|_x^2 dt \leq \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|\tilde{f}(\sigma + it)\|_y^2 dt = C_1 \int_0^\infty t^{2\sigma-1} \|U(t)\|_y^2 dt. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{2\sigma-1} \|tU'(t)\|_y^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|(\sigma + it)R(\sigma + it) \tilde{f}(\sigma + it)\|_y^2 dt \leq \\ &\leq \frac{C_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|\tilde{f}(\sigma + it)\|_y^2 dt = C_3 \int_0^\infty t^{2\sigma-1} \|U(t)\|_y^2 dt. \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует оценка $\|U(t)\|^{1,\sigma} \leq C \cdot \|f(t)\|^{0,\sigma}$, из которой вытекает единственность решения уравнения и принадлежность его пространству $X^{1,\sigma}$.

Теорема доказана.

Для уравнения с переменными коэффициентами (1) имеет место следующая

Теорема 2. Если резольвента $R(\lambda)$ регулярна,

$$\|R(\lambda)\|_x + |\lambda| \cdot \|R(\lambda)\|_y = O(1), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} \lambda = \sigma,$$

$$\|A_j(t)\|_y < \left(\|L^{-1}\|^{1,\sigma} \sqrt{(m+1) \sum_{j=0}^m a_j^{-2\sigma}} \right)^{-1},$$

то уравнение (1) имеет единственное решение из $X^{1,\sigma}$ при $f(t) \in Y^{0,\sigma}$.

Доказательство. Левую часть уравнения (1) представим в виде суммы двух слагаемых

$$\begin{aligned} L(t)U(t) &= LU(t) + L_1(t)U(t) \\ LU(t) &= \sum_{j=0}^m \{tU'(b_j t) + A_j U(a_j t)\}, \\ L_1(t)U(t) &= \sum_{j=0}^m A_j U(a_j t). \end{aligned}$$

В силу условий теоремы оператор L непрерывно обратим.

Оценим теперь норму оператора L_1 .

$$\begin{aligned} \left(\|L_1(t)U(t)\|^{0,\sigma} \right)^2 &= \int_0^\infty t^{2\sigma-1} \|L_1(t)U(t)\|_y^2 dt \leq \\ &\leq \int_0^\infty t^{2\sigma-1} \cdot \left(\sum_{j=0}^m \|A_j(t)\|_y \cdot \|U(a_j t)\|_x \right)^2 dt < \\ &< (m+1) \cdot \left(\|L^{-1}\|^{1,\sigma} \sqrt{m+1 \sum_{j=0}^m a_j^{-2\sigma}} \right)^{-2} \cdot \sum_{j=0}^m \int_0^\infty t^{2\sigma-1} \|U(a_j t)\|_x^2 dt = \\ &= (\|L^{-1}\|^{1,\sigma})^{-2} \int_0^\infty t^{2\sigma} \cdot \|U(t)\|_x^2 dt \leq (\|L^{-1}\|^{1,\sigma})^{-2} (\|U(t)\|^{1,\sigma})^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Получим асимптотическую формулу для решений уравнения нейтрального типа с переменными коэффициентами (1) через решение соответствующего однородного уравнения.

Операторнозначную функцию

$$L(\lambda) = \sum_{j=0}^m (A_j a_j^{-\lambda} - \lambda b_j^{-\lambda-1} \cdot E)$$

будем называть операторным квазипучком [8].

Лемма 2. Если $\lambda_0 - n$ – кратный полюс резольвенты $R(\lambda)$, то функция

$$U(t) = t^{-\lambda_0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\ln t)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \varphi_k, \quad (3)$$

где φ_0 – собственный вектор, а $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ – присоединенные векторы пучка $L(\lambda)$, соответствующего собственному значению λ_0 , являются решениями уравнения (2) при $f(t) = 0$.

Справедливость леммы проверяется непосредственной подстановкой $U(t)$ в уравнение (2).

Теорема 3. Если $\|A_j(t)\|_y \leq C \cdot t^{-\sigma}$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$ при $t \rightarrow \infty$ регулярна в полосе $0 < \operatorname{Re} \lambda < \sigma$ за исключением полюсов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ кратности $S_1, S_2, \dots, S_n$ соответственно; при $|\lambda| > \max_{k \geq 1} |\operatorname{Re} \lambda_k|$, $|\lambda| \rightarrow \infty$ в полосе $0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \sigma$; $\varphi_0^k, \varphi_1^k, \dots, \varphi_{S_k-1}^k$ – собственный и присоединенные векторы квазипучка $L(\lambda)$, соответствующие полюсу $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, $f(t) \in Y^{0,\sigma} \cap Y^{0,0}$, то имеет место асимптотическая формула

$$\left\| U(t) - \sum_{k=1}^n t^{-\lambda_k} \sum_{e=0}^{s_k-1} \frac{(\ln t)^{s_k-e-1}}{(s_k-e-1)!} \varphi_e^k \right\|^{0,\sigma} \leq \\ \leq C \cdot \left(\int_0^\infty t^{2\sigma-1} \|f(t)\|_y^2 dt + \int_0^\infty \|U(t)\|_x^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}$$

для любого решения $U(t) \in X^{1,\sigma} \cap X^{1,0}$ уравнения (1), где постоянная C не зависит от решения $U(t)$.

Доказательство. Уравнение (1) перепишем так:

$$\sum_{j=0}^m \{tU'(b_j t) + A_j U(a_j t)\} = f(t) \sum_{j=0}^m A_j(t) U(a_j t).$$

Применив к обеим частям последнего равенства преобразование Меллина на прямой $\operatorname{Re} \lambda = \sigma$, получим

$$\tilde{U}(\lambda) = R(\lambda) \left\{ \tilde{f}(\lambda) - \sum_{j=0}^m \int_0^\infty t^{\lambda-1} A_j(t) U(a_j t) dt \right\}.$$

В силу условий теоремы полюса $R(\lambda)$ и $\tilde{U}(\lambda)$ в полосе $0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \sigma$ совпадают, т. к. выражение в фигурных скобках регулярно в полосе $0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \sigma$. Пусть эти полюса находятся внутри прямоугольника

$$P = \{\lambda : 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \sigma, \quad |\operatorname{Im} \lambda| \leq b\},$$

контур которого обозначим через Γ .

Из леммы Римана–Лебега [1] следует, что

$$\int_{i\alpha}^{\sigma+i\alpha} t^{-\lambda} \tilde{U}(\lambda) d\lambda \rightarrow 0 \quad \text{при } |\alpha| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

По теореме Коши [4] об интеграле по замкнутому контуру и в силу (6) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-\lambda} \tilde{U}(\lambda) d\lambda = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{\lambda_k} \left\{ t^{-\lambda} R(\lambda) \left[\tilde{f}(\lambda) - \sum_{j=0}^m \int_0^\infty t^{\lambda-1} A_j(t) U(a_j t) dt \right] \right\}$$

или

$$U(t) - \sum_{k=1}^n U_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-\lambda} \tilde{U}(\lambda) d\lambda, \quad (5)$$

где

$$U_k(t) = t^{-\lambda_k} \cdot \sum_{e=0}^{s_k-1} \frac{(\ln t)^{s_k-e-1}}{(s_k-e-1)!} \varphi_e^{(k)} -$$

решение однородного уравнения $LU(t) = 0$, связанное с полюсом λ_k резольвенты $R(\lambda)$ кратности s_k .

Оценивая интеграл, получим

$$\int_0^\infty t^{2\sigma-1} \cdot \left\| U(t) - \sum_{k=0}^n U_k(t) \right\|_y^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \|\tilde{U}(\sigma + it)\|_y^2 dt \leq \\ \leq C \cdot \int_0^\infty t^{2\sigma-1} \cdot \left\| f(t) - \sum_{k=0}^n A_k(t) U(a_k t) \right\|_y^2 dt \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq 2 \cdot \int_0^\infty t^{2\sigma-1} \cdot \|f(t)\|_y^2 dt + 2 \leq \int_0^\infty t^{2\sigma-1} \cdot \left(\sum_{j=0}^m \|A_j(t)\|_y \|U(a_j t)\|_x \right)^2 dt \leq \\ &\leq 2(\|f(t)\|^{0,\sigma})^2 + 2(m+1) \int_0^\infty t^{2\sigma-1} \cdot t^{-2\sigma} \sum_{j=0}^m \|U(a_j t)\|_x^2 dt \leq \\ &\leq C \left(\int_0^\infty t^{2\sigma-1} \|f(t)\|_y^2 dt + \int_0^\infty \|U(t)\|_x^2 \frac{dt}{t} \right). \end{aligned}$$

Литература

1. Алиев Р.Г. ФДУ в гильбертовом пространстве. – Махачкала: Издательство ДГУ, 2010. – 348 с.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1990. – 620 с.
3. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. – М.: Наука, 1993. – 450 с.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 2017. – 510 с.
5. Алейдаров С.М. Конечномерность ядра оператора L в гильбертовом пространстве со степенным весом // Вестник ДГУ. – 2011. – Вып. 1. – С. 60–64.
6. Алиев Р.Г., Алейдаров С.М. Разрешимость ФДУ второго порядка в пространствах со степенным весом // Вестник ДГУ. – 2014. – Вып. 1. – С. 109–116.
7. Алейдаров С.М. Асимптотика решений ФДУ первого порядка в гильбертовом пространстве со степенным весом // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. – Махачкала: Изд-во ДГУ, 2017. – С. 24–27.
8. Алейдаров С.М. Существование решений одного частного случая уравнения нейтрального типа в пространствах со степенным весом // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. – Махачкала: Изд-во ДГУ, 2019. – С. 14–16.
9. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 2017. – 560 с.
10. Алейдаров С.М. Оценка решений ФДУ первого порядка в пространствах со степенным весом // Актуальные проблемы математики и смежные вопросы. – Махачкала: ДГПУ, 2018. – С. 21–24.

Поступила в редакцию 23 апреля 2020 г.

UDC 517.929

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-4-27-33

Investigation of a Neutral Type Equation in Spaces with Power Weight

S.M. Aleidarov

Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; sey-dullaaleym@mail.ru

The article deals with an equation of a neutral type with a linear deviation of the argument in a Hilbert space with a power weight. The presence of a linear deviation of the argument and a variable coefficient in front of the derivative does not allow the Fourier transform to study a neutral type equation. Therefore, when considering solvability and asymptotics, we used the Mellin transform. For a neutral type equation with constant operator coefficients, sufficient conditions for unique solvability via a resolvent are obtained.

For a neutral type equation with variable coefficients, estimates of variable parts providing unambiguous solvability are obtained. An asymptotic estimate is obtained for all solutions of the equation in the case when there is no uniqueness of the solution.

Keywords: *neutral type, power-law weight, solvability, Hilbert space.*

Received 23 April 2020