МАТЕМАТИКА

УДК 530.145; 004.383.4

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-4-7–12

С.В. Шалагин

Представление квантового преобразования Фурье на основе дискретной модели квантово-механической системы

ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ»; Россия, 420111, г. Казань, ул. Карла Маркса, 10; sshalagin@mail.ru

Предложено представление квантового преобразования Фурье (КвПФ) на основе дискретной модели (ДМ) квантово-механической системы, включающей $N=2^n$ базисных состояний, которая включает в себя 2(N–1) независимых элементов. Представление основано на однотипных операциях (вентилях): Адамара и с контролируемой фазой. Показана возможность распределенного моделирования КвПФ путем варьирования только N элементов ДМ.

Ключевые слова: *квантовое преобразование Фурье, дискретная модель, представление.*

Введение

Исследования в области квантовой обработки информации являются актуальным и перспективным научным направлением [1–8]. Вместе с тем существуют физические барьеры, связанные с реализацией квантово-механических систем (КМС), включающих в себя множество базисных состояний [4, 7]. В данной связи представляют интерес задачи, связанные с математическим моделированием КМС [6, 9–12].

В [13] предложена дискретная модель (ДМ) КМС, включающая *N* базисных состояний, которую обозначим как КМС(*N*). Состояние КМС(*N*) представимо на основе 2(N–1) параметров, а изменение ее состояния – на основе операций умножения над элементами поля Галуа [14], выполняемых параллельно. В [15] показано, что ДМ КМС(*N*) представима на основе системы однотипных нелинейных полиномиальных функций [16–20], реализуемых на распределенных вычислительных системах с программируемой архитектурой (РВС ПА) [21], элементами которых являются программируемые логические интегральные схемы (ПЛИС) класса FPGA [22].

В работе предложено представление квантового преобразования Фурье (КвПФ) [23], которое основано на определении в рамках ДМ КМС(*N*), где $N = 2^n$, квантового алгоритма, включающего в себя известные квантовые вентили: однокубитный вентиль Адамара и двухкубитный вентиль с контролируемой фазой. Указанное представление позволяет отобразить воздействие КвПФ на КМС(*N*), состояние которой описано $2(N-1)$ элементами заданной ДМ путем распределенного варьирования элементов данной ДМ КМС(*N*) при заданном значении $N=2^n$.

Дискретная модель квантово-механической системы с *N* базисными состояниями

КМС(*N*) общего вида описывается конечномерным гильбертовым (унитарным) пространством – *H*, $|H| = N < \infty$ [1, 2]. Состояние КМС(*N*) с базисными состояниями $|j\rangle$, $j = \overline{0, N-1}$ описывается как вектор-столбец (кет-вектор) [2, 3]

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} r_0 e^{i\varphi_0} & \dots & r_{N-1} e^{i\varphi_{N-1}} \end{pmatrix}^T, \tag{1}$$

где $\sum_{j=0}^{N-1} r_j^2 = 1$. Система с конечным числом базисных состояний (уровней, измерений *H*) представляет интерес с точки зрения квантовой обработки информации. Изменение состояния КМС, представленной в виде (1), описывается квантовым вентилем (КВ) – матрицей *G* размерности $N \times N$ [4].

ДМ КМС(*N*) описывается при использовании графовой модели – двоичного (бинарного) дерева *T* [13]. Число его вершин, являющихся листьями, равно числу базисных состояний КМС(*N*), а число его узлов ветвления $(N-1)$ определяет количество параметров, описывающих амплитудные и фазовые составляющие данной модели – $2(N-1)$ [15]. Варьирование состояния ДМ КМС(*N*), описываемое системой (1), задано квантовым вентилем, унитарной матрицей размерности $N \times N$ вида $G = G_\varphi G_A$, где матрицы G_φ и G_A размерности $N \times N$ определяют варьирование фазовой и амплитудной составляющей ДМ КМС(*N*) соответственно. В [13, 15] сформулированы две теоремы.

Теорема 1. Квантово-механическая система, имеющая *N* базисных состояний и определенная согласно (1), представима в виде вектора, включающего $2(N-1)$ параметров

$$(\theta_0, \dots, \theta_{N-2}, t_0, \dots, t_{N-2}), \tag{2}$$

где $(\theta_0, \dots, \theta_{N-2})$ определяют амплитудные составляющие элементов вектора (1), а $(t_0, \dots, t_{N-2})$ – фазовые составляющие (1).

Теорема 2. Операция по варьированию состояния квантово-механической системы, имеющей *N* базисных состояний и определенной на основе (1), представлена вектором, включающим $2(N-1)$ параметр

$$(\Delta\theta_0, \dots, \Delta\theta_{N-2}, \Delta t_0, \dots, \Delta t_{N-2}), \tag{3}$$

который однозначно определяет квантовый вентиль $G = G_\varphi G_A$, где G_φ и G_A имеют размерность $N \times N$. G_φ задана параметрами $(\Delta t_0, \dots, \Delta t_{N-2})$ и описывает варьирование фазовых составляющих, а G_A – параметрами $(\Delta\theta_0, \dots, \Delta\theta_{N-2})$ и описывает изменение амплитудных составляющих элементов вектора (1).

Пример. Для КМС(4), заданной согласно (2), $(\theta_0, \dots, \theta_2, t_0, \dots, t_2)$, элементы кет-вектора вида (1) представимы согласно [13] по формулам $r_0 = \cos(\theta_0)\cos(\theta_1)$, $r_1 = \cos(\theta_0)\sin(\theta_1)$, $r_2 = \sin(\theta_0)\cos(\theta_2)$, $r_3 = \sin(\theta_0)\sin(\theta_2)$, $\varphi_0 = \tilde{t}$, $\varphi_1 = \tilde{t} + t_1$, $\varphi_2 = \tilde{t} + t_0$, $\varphi_3 = \tilde{t} + t_0 + t_2$.

Моделирование квантовых вентилей на основе дискретной модели квантово-механической системы

КвПФ основано на двух однотипных операциях, описываемых оператором Адамара над одним кубитом (или двумя базисными состояниями КМС(N)) и вентилем с контролируемой фазой (ВКФ) над двумя кубитами (или четырьмя базисными состояниями КМС(N)), $N = 2^n$. Рассмотрим представление указанных операций над ДМ КМС(N) вида (1).

Оператор Адамара, воздействующий на два базисных состояния КМС(N) – $\left|2j\right\rangle$ и $\left|2j+1\right\rangle$, представим в виде: $A_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $j=\overline{0,N/2-1}$. Рассмотрим параметры θ_{j+b} и $\Delta\theta_{j+b}$, $j=\overline{0,N/2-1}$, $b=N/2-1$ векторов вида (2) и (3) соответственно. Для представленной модели имеет место

Утверждение 1. Воздействие оператора Адамара A_j на базисные состояния КМС(N), $N=2^n$, $\left|2j\right\rangle$, $\left|2j+1\right\rangle$ описывается элементом $\Delta\theta_{j+b}$ вектора (3), вычисленного на основе элемента θ_{j+b} вектора (2)

$$\Delta\theta_{j+b} = \pi/4 - \theta_{j+b}, \tag{4}$$

где $j=\overline{0,N/2-1}$, $b=N/2-1$, и элементом Δt_{j+b} вектора (3) $\Delta t_{j+b} = \pi$.

ВКФ, который воздействует на четыре базисных состояния КМС(N) – $\left|2j\right\rangle$, $\left|2j+1\right\rangle$, $\left|2k\right\rangle$ и $\left|2k+1\right\rangle$, $\left(N/2-1\right) \ge k > j \ge 0$, представим в виде матрицы: $S_{j,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix}$, $D=\exp\left(i\cdot 2^{-(k-j)}\pi\right)$, $0 \le j < k \le \left(N/2-1\right)$. Рассмотрим элементы t_{j+b}, t_{k+b}, Δt_{j+b}, Δt_{k+b}, $j<k$, $j,k=\overline{0,N/2-1}$, $b=N/2-1$ векторов вида (2) и (3) соответственно. Справедливо

Утверждение 2. Воздействие вентилем с контролируемой фазой $S_{j,k}$ на базисные состояния КМС(N), $N = 2^n$, $\left|2j\right\rangle$, $\left|2j+1\right\rangle$, $\left|2k\right\rangle$ и $\left|2k+1\right\rangle$ описывается элементом $\Delta t_{k+b} = 2^{-(k-j)}\pi$ вектора (3) на элемент t_{k+b} вектора (2), $b=N/2-1$, $k=\overline{j+1,N/2-1}$ при заданном $j=\overline{0,N/2-2}$.

Реализация КвПФ над КМС(N), $N=2^n$ предполагает выполнение квантового алгоритма в виде определенной последовательности воздействий на ее заданные базисные состояния, описываемые квантовыми вентилями вида A_j и $S_{j,k}$, $k=\overline{j+1,N/2-1}$, $j=\overline{0,N/2-2}$. Данная последовательность имеет вид [22]: $A_{N/2-1}$, $S_{N/2-2,\,N/2-1}$, $A_{N/2-2}$, $S_{N/2-3,\,N/2-1}$, $S_{N/2-3,\,N/2-2}$, …, A_1, $S_{0,\,N/2-1}$, …, $S_{0,1}$, A_0. То есть вентили Адамара применяются в обратном порядке к парам базисных состояний КМС(N) с номерами от $N/2-1$ до 0. В промежутках между вентилями Адамара A_{j+1} и A_j применяются вентили $S_{j,k}$ для $k=\overline{N/2-1,\,j+1}$ при заданном $j=\overline{N/2-2,0}$. Согласно утверждениям 1 и 2, указанные воздействия на КМС(N), $N = 2^n$ могут быть представлены в рамках предложенной ДМ [13, 15] и вычислены распределенно путем варьирования различных элементов вектора (2) по квантовым вентилям, которые описываются соответствующими элементами вектора (3). Различные вентили Адамара оказывают воздействия $\Delta\theta_{j+b}$, описанные согласно (4), на соответствующие элементы θ_{j+b} вектора (2), $j = \overline{0, N/2-1}$, $b = N/2-1$. Совокупность воздействий, описываемых вентилями Адамара, на элементы t_{j+b} вектора (2), $j = \overline{0, N/2-1}$, $b = N/2-1$, и вентилями с контролируемой фазой $S_{j,k}$, $k = \overline{j+1, N/2-1}$, $j = \overline{0, N/2-2}$, в рамках КвПФ представлена как воздействия вида:

$$\Delta t_{N/2-1} = \pi \,,\ \Delta t_v = \pi\left(1 + \sum_{l=1}^{v-b} 2^{-l}\right), \qquad (5)$$

где $v = \overline{N/2, N-2}$, $b = N/2-1$. При этом вентили Адамара и вентили с контролируемой фазой воздействуют на различные параметры независимо друг от друга и порядок их воздействия не имеет значения в рамках ДМ КМС(N). Имеет место

Замечание. При описании КвПФ на основе ДМ КМС(N), $N = 2^n$ параметры θ_a, t_a вектора (2) и параметры $\Delta\theta_a$, Δt_a вектора (3), $a = \overline{0, b-1}$, $b = N/2-1$ не задействованы.

На основе вышеизложенного справедливо

Утверждение 3. Воздействие КвПФ на КМС(N), $N = 2^n$ представлено как распределенные воздействия, задаваемые согласно (4) – на параметры θ_{j+b}, $j = \overline{0, N/2-1}$, и согласно (5) – на параметры t_v, $v = \overline{N/2-1, N-2}$, $b = N/2-1$.

Согласно утверждению 3 и замечанию оценим вычислительную сложность моделирования КвПФ КМС(N), $N = 2^n$ на основе ДМ, состояние которой представлено согласно (2), а варьирование ее состояния – согласно (3). Для представления ДМ КМС(N), $N = 2^n$ требуется $2(N-1)$ элементов, из которых варьируется только N: $N/2$ элементов меняют свое значение согласно формуле (4), остальные – согласно формуле (5).

Заключение

Предложено представление квантового преобразования Фурье при использовании ДМ КМС(N), $N = 2^n$ путем распределенного варьирования N из $2(N-1)$ элементов указанной ДМ. Вычислены значения величин, на которые производится варьирование элементов ДМ заданной КМС(N). Данное обстоятельство позволяет выполнять моделирование указанного квантового алгоритма при использовании распределенных вычислений. Показано, что количество варьируемых параметров предложенной дискретной модели возрастает линейно с ростом количества базисных состояний КМС(N).

Литература

1. *Дирак П.* Лекции по квантовой механике. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1998. – 148 с.

2. *Холево А.С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

3. *Холево А.С.* Введение в квантовую теорию информации. – М.: МЦНМО, 2002. – 228 с.

4. *Валиев К.А., Кокин А.А.* Квантовые компьютеры: надежды и реальность. – М.: Ижевск: R & C Dynamics, 2001. – 351 с.

5. A Quantum Transistor Based on an Atom-Photon Molecule / *S.O. Tarasov, N.M. Arslanov, S.A. Moiseev, S.N. Andrianov* // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. – 2018. – Yol. 82, № 8. – P. 1042–1046.

6. Аблаев Ф.М. О сложности классических и квантовых моделей вычислений // Математические вопросы кибернетики. – 2004. – Вып. 13. – С. 137–146.

7. *Богданов Ю.И., Валиев К.А., Кокин А.А.* Квантовые компьютеры: достижения, трудности реализации и перспективы // Микроэлектроника. – 2011. – Т. 40, № 4. – С. 243–255.

8. *Andrew M. Childs, Wim van Dam*. Quantum algorithms for algebraic problems // Rev. Mod. Phys. 82, 1. – Published 15 January 2010. URL: https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.82.1

9. *Richter M., Arnold G., Trieu B., Lippert T.* Massively Parallel Quantum Computer Simulations: Towards Realistic Systems // John von Neumann Institute for Computing: NIC series. – 2007. – V. 38. – P. 61–68.

10. *Богданов Ю.И., Богданова Н.А., Лукичев В.Ф. и др.* Вычислительные задачи моделирования элементной базы квантовых компьютеров // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2013. – № 3. – С. 3–15.

11. *Зуев С.В.* Моделирование квантовых вычислений на классическом компьютере // Вестник БелГТУ. – 2013. – № 2. – С. 135–139.

12. Statistical Models and Adequacy Validation for Optical Quantum State Tomography with Quadrature Measurements / *Y.I. Bogdanov, N.A. Bogdanova, L.V. Belinsky, V.F. Lukichev* // Russian Microelectronics. – 2017. – Vol. 46, № 6. – P. 371–378.

13. *Шалагин С.В.* Дискретная модель квантовой системы обработки информации // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2007. – № 4. – С. 22–27.

14. *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля: в 2 т. – М.: Мир, 1988.

15. *Шалагин С.В.* Полиномиальная модель квантовой системы обработки информации // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики: материалы XIII Межд. конф., приуроченной к 55-летию факультета математики и компьютерных наук (г. Махачкала, 16–20 сентября 2019 г.). – Махачкала: Изд-во ДГУ, 2019. – С. 180–185.

16. *Захаров В.М., Шалагин С.В.* Вычисление нелинейных полиномиальных функций на многопроцессорной системе с программируемой архитектурой // Информационные технологии. – 2012. – № 5. – С. 6–11.

17. *Захаров В.М., Шалагин С.В.* О развитии аппаратных средств статистического моделирования // Развитие вычислительной техники и ее программного обеспечения в России и странах бывшего СССР: история и перспективы: сб. трудов Третьей межд. конф. SoRuCom-2014. – Н. Новгород, 2014. – С. 103–109.

18. *Шалагин С.В.* Представление нелинейных полиномов над конечным полем распределенной вычислительной системой // Нелинейный мир. – 2009. – № 5. – С. 376–379.

19. *Шалагин С.В.* Сложность вычисления нелинейных полиномиальных функций над полем GF(2^2) на ПЛИС/FPGA // Поиск эффективных решений в процессе создания и реализации научных разработок в российской авиационной и ракетно-косми-

ческой промышленности: сб. трудов Межд. научно-практ. конф. (г. Казань, 5–8 августа 2014 г.). – Казань, 2014. – С. 661–664.

20. *Шалагин С.В*. Реализация цифровых устройств в архитектуре ПЛИС/FPGA при использовании распределенных вычислений в полях Галуа: монография. – Казань: КНИТУ-КАИ, 2016. – 228 с.

21. *Дордопуло А.И., Каляев И.А., Левин И.И. и др.* Высокопроизводительные реконфигурируемые вычислительные системы // Суперкомпьютеры. – 2010. – № 3 (3). – С. 44–48.

22. *Кузелин М.О*., *Кнышев Д.А., Зотов В.Ю.* Современные семейства ПЛИС фирмы Xilinx: справочное пособие. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004. – 440 с.

23. *Coppersmith Down*. An approximate Fourier transform useful in quantum factoring // IBM Research Report RC19642 «R. Cle». – 1994.

Поступила в редакцию 19 февраля 2020 г.

UDC 530.145; 004.383.4

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-4-7–12

Representation of the Quantum Fourier Transform Based on a Discrete Model of a Quantum-mechanical System

S.V. Shalagin

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI; Russia, 420111, Kazan, Karl Marks st., 10; sshalagin@mail.ru

A representation of the quantum Fourier transform (QFT) is proposed based on the discrete model (DM) of a quantum-mechanical system that includes $N = 2^n$ basic states, involving 2(N–1) independent elements. The representation is based on the same type of operations (gates): Hadamard and with controlled phase. The possibility of distributed simulation of QFT by varying only N elements of DM is shown.

Keywords: *quantum Fourier transform, discrete model, representation.*

Received 19 February 2020