

УДК 004.942

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-3-36-44

А.В. Воронина

Численное моделирование ламинарной свободной конвекции вдоль поверхности тепловыделяющего элемента

Димитровградский инженерно-технологический институт – филиал НИЯУ МИФИ; Россия, Ульяновская обл., 433511, г. Димитровград, ул. Куйбышева, 294; AVVoronina@mephi.ru

В статье представлена модель ламинарной свободной конвекции у поверхности тепловыделяющего элемента в приближении неизотермической пластины с постоянным тепловым потоком. Предполагается, что естественная конвекция является устойчивой, ламинарной, двумерной, без диссипации, а жидкость – ньютоновской с постоянными свойствами. Посредством преобразования переменных путем введения параметров подобия в дифференциальные уравнения пограничного слоя для вертикальной поверхности получена система дифференциальных уравнений. Впоследствии они сводятся к системе первого порядка и интегрируются с использованием методов, реализованных в среде Matlab. Было проведено обоснование выбора метода решения данной системы дифференциальных уравнений с переменным шагом интегрирования для значений точности $10^{-8} \dots 10^{-2}$. Получены профили скорости и температуры для чисел Прандтля 0.01, 1, 10 и 100. Эти вычисленные профили находятся в хорошем согласии с данными, вычисленными Спэрроу и Греггом для неизотермической пластины. Представлены параметры потока и теплопередачи (касательное напряжение и число Нуссельта) у поверхности пластины с постоянным тепловым потоком. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными. Хорошее согласие с экспериментальными данными, опубликованных в литературе, позволяет сделать вывод об эффективности и применимости представленной модели естественной конвекции. Описанный подход возможно применить для моделирования тепловыделяющих элементов в среде с целью определения параметров теплообмена и обоснования безопасности.

Ключевые слова: *теплообмен, модель, ламинарная конвекция, Matlab.*

Введение

Самым ранним аналитическим исследованием свойств теплового пограничного слоя был анализ уравнений пограничного слоя, выполненный Спэрроу и Греггом [1]. Результаты были подтверждены Польгаузенем [2], Дотсоном [3], Гольдштейном и Эккертом [4].

В настоящее время проведено много исследований естественной конвекции у вертикальной пластины с постоянным тепловым потоком [5–7]. Ввиду востребованности подобных расчетных моделей в различных областях науки и промышленности. Расчетная модель, хорошо согласующаяся с экспериментальными данными, позволит значительно сократить время, затрачиваемое на исследование объекта.

Практически для каждого случая необходима разработка отдельной модели, которая учитывает не только общие параметры среды, но и особенности, обусловленные конструкцией или материальным составом моделируемого объекта. При использовании математического пакета необходимо обосновать выбранные подходы как обладающие достаточной достоверностью получаемых результатов.

В работе представлено численное моделирование ламинарного свободно-конвекционного потока и теплообмена вдоль вертикальной пластины с постоянным

тепловым потоком, моделирующей в первом приближении тепловыделяющий элемент. Проведен анализ для обоснования выбора метода решений систем дифференциальных уравнений, реализованных в среде Matlab.

Математическая модель

Рассмотрим нагретую вертикальную плоскую пластину, погруженную в неподвижную жидкость. Предполагается, что свободный конвекционный поток является устойчивым, ламинарным, двумерным, без диссипации, а жидкость – ньютоновской с постоянными свойствами, включая плотность. Направим ось Y перпендикулярно пластине (горизонтальное направление), а ось X – вдоль пластины (вертикальное направление).

Уравнения пограничного слоя для вертикальной поверхности можно записать в следующем виде [8]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(t - t_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (3)$$

где t_∞ – температура окружающей среды, °C; x – координата, нормальная к стенке, м; y – координата вдоль вертикальной стенки, м; β – коэффициент объёмного теплового расширения, K^{-1} ; g – ускорение свободного падения, m/c^2 ; a – коэффициент температуропроводности, m^2/c .

Граничные условия имеют вид:

$$u(y,0) = v(y,0) = u(y,\infty) = 0; \quad t(y,0) = t_w; \quad t(y,\infty) = t_\infty. \quad (4)$$

В большинстве экспериментальных задач для случая постоянного теплового потока температура поверхности неизвестна. Единственно известной физической величиной является тепловой поток, который можно определить по подводу тепла. Чтобы упростить исследования в этих условиях, Спэрроу и Грегг [9] ввели модифицированное число Грасгофа Gr_x^* , определенное следующим образом:

$$Gr_x^* = \frac{g \beta q x^4}{\lambda \nu^2}.$$

Решение уравнений (1)–(3) включает в себя преобразование переменных путем введения параметров подобия, определенных через число Gr_x^* [10]:

$$\eta = \frac{y}{x} \left(\frac{Gr_x^*}{5} \right)^{1/5},$$

$$\psi(x,y) = 5\nu \left(\frac{Gr_x^*}{5} \right)^{1/5} f(\eta), \quad \Theta(\eta) = \frac{t - t_\infty}{xq/\lambda} \left(\frac{Gr_x^*}{5} \right)^{1/5}.$$

С вышеизложенным определением функции тока $\psi(x,y)$ компоненты скорости могут быть выражены как

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{5\nu}{x} \left(\frac{Gr_x^*}{5} \right)^{2/5} f'(\eta)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\nu}{x} \left(\frac{Gr_x^*}{5} \right)^{1/5} [\eta f'(\eta) - 4f].$$

Тогда уравнения (1) и (2) примут следующий вид [11]:

$$f''' + 4ff'' - 3f'^2 + \Theta = 0 \quad (5)$$

$$\Theta'' + Pr(4f\Theta' - \Theta f') = 0, \quad (6)$$

где Pr – число Прандтля.

Уравнения (5) и (6) составляют систему дифференциальных уравнений (СДУ) для функций скорости f и температуры Θ . Они должны решаться при соблюдении следующих граничных условий:

$$f(0) = f'(0) = f'(\infty) = \Theta(\infty) = \Theta'(0) + 1 = 0. \quad (7)$$

Процедура решения

Первоначальные приближенные решения СДУ получены Спэрроу и Греггом и представлены в работе [9].

Современные математические пакеты применяют комплекс методов численного решения СДУ (см. табл. 1). Данный набор методов позволяет эффективно решать различные задачи, но при этом возникает проблема выбора соответствующего метода и правильного задания его параметров.

Таблица 1. Методы решения СДУ с переменным шагом, реализованные в Matlab [12]

ode45	Комбинированный метод Рунге–Кутты 4–5-го порядка
ode23	Комбинированный метод Рунге–Кутты 2–3-го порядка
ode15s	Многошаговый метод, базирующийся на формулах численного дифференцирования
ode23s	Одношаговый метод, базирующийся на модифицированной формуле Розенброка
ode23t	Метод трапеций с использованием «свободного» интерполянта
ode23tb	Комбинированный метод, который использует на первом этапе формулу трапеций, а на втором – формулы обратного дифференцирования второго порядка

С целью обоснования выбора определенного метода решения данной СДУ была разработана модель ламинарной свободной конвекции у поверхности пластины при постоянном тепловом потоке с решением уравнений (5) и (6) на интервале $[0; 5]$ при начальных условиях (7) методами с переменным шагом интегрирования для значений точности $10^{-8} \dots 10^{-2}$.

Уравнения (5) и (6) можно привести к нормальной форме Коши, введя следующий вектор переменных состояний:

$$X = [f, f', f'', \Theta, \Theta']^T. \quad (8)$$

Тогда уравнения (5) и (6) можно представить в виде системы

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = X_3 \\ \dot{X}_3 = -4 \cdot X_1 \cdot X_3 + 3 \cdot X_2^2 - X_4 \\ \dot{X}_4 = X_5 \\ \dot{X}_5 = -Pr \cdot (4X_1 \cdot X_5 - X_4 \cdot X_2) \end{cases} \quad (9)$$

со следующими граничными условиями:

$$X(0) = [0, 0, a_1, a_2, -1]^T \quad (10)$$

Значения переменных a_1 и a_2 должны быть получены одновременно и итеративно и проверены в разрешении СДУ. В табл. 2 описывается набор процедур Matlab для решения уравнений (5) и (6) вместе с граничными условиями (7).

Таблица 2. Набор процедур Matlab, последовательно используемых для решения уравнений (5) и (6)

Код Matlab	Краткое описание
conv(t, x).m	Определяет дифференциальные уравнения (5) и (6)
conclusion(a).m	Описывает граничные условия для интегрирования, обеспечивает невязки в граничных условиях и приближенные решения. Интегрирует (9)
Main_Conv.m	Обеспечивает правильные значения a_1 и a_2 , используя приближенные решения от conclusion(a).m Снова интегрирует начальную задачу (9), используя правильные значения a_1 и a_2

Выходные данные кода Main_Conv.m дают табличные значения $f, f', f'', \Theta, \Theta'$ как функцию от переменной подобия η для различных значений числа Прандтля.

Для анализа решения уравнений были вычислены относительные погрешности значений $f''(0)$ и $\Theta'(0)$ в конце интервала интегрирования соответствующим методом на заданном интервале при различных значениях точности вычисления. Степень точности в системе Matlab устанавливается с помощью системной переменной TOL. Значение TOL при расчете варьировалось от 10^{-2} до 10^{-8} . Данные расчетов для значения $Pr = 1$ приведены на рис. 1.

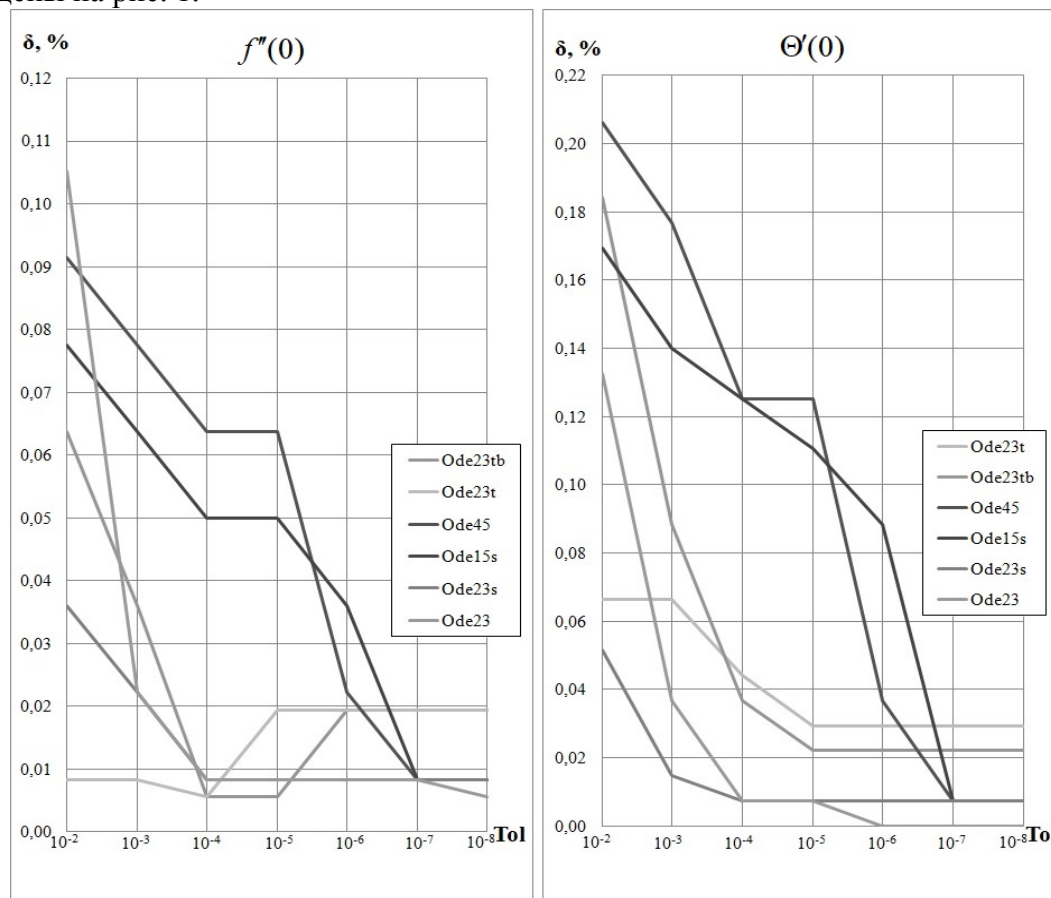


Рис. 1. Относительная погрешность расчета численными методами при различном порядке точности

Выполненный анализ указывает на то, что относительная погрешность может достигать 0.21 % от точного значения. Повышение точности позволяет снизить процент погрешности, его значения находятся на уровне 0,006...0,02 %. Наилучшую сходимость дает решатель Ode23 при высоком порядке точности.

Интерпретация результатов

Некоторые типичные профили температуры и скорости для разных значений Pr , полученные с использованием Ode23, показаны на рис. 2. Эти профили находятся в хорошем согласии с данными, вычисленными Спэрроу и Греггом для ламинарной свободной конвекции на вертикальных пластинах при постоянном тепловом потоке.

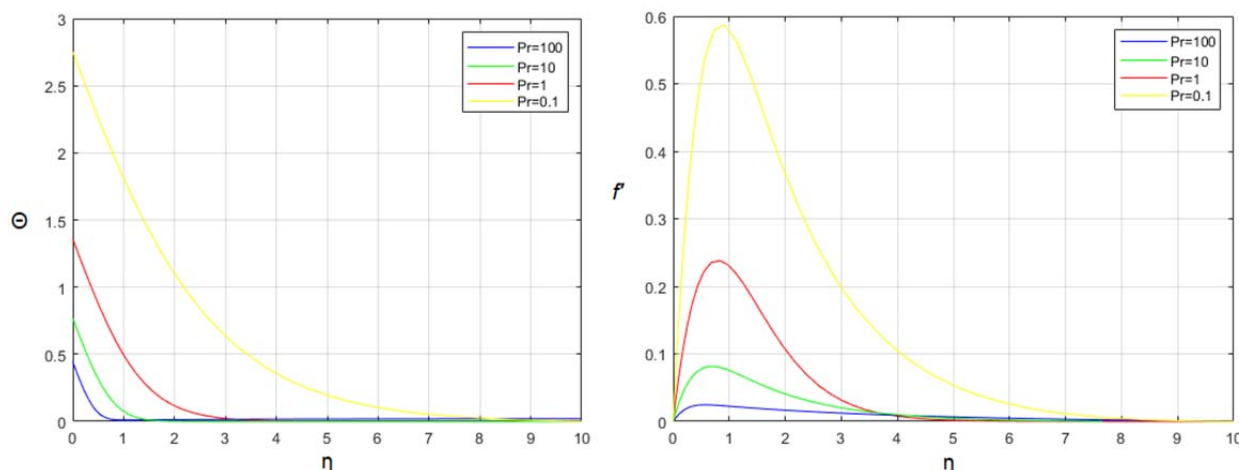


Рис. 2. Зависимость относительной температуры Θ и скорости f' от безразмерного комплекса

$$\eta = \frac{y}{x} \left(\frac{Gr_x^*}{5} \right)^{1/5}$$

Помимо распределений скорости и температуры желательно вычислить другие физически важные величины (например, касательное напряжение, коэффициент теплопередачи), связанные с потоком свободной конвекции.

Касательное напряжение на стенке τ_w при естественной конвекции может быть рассчитано по закону вязкости Ньютона

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \cdot \frac{5\nu}{x^2} \left(\frac{Gr_x^*}{5} \right)^{3/5} \cdot f''(0).$$

Тогда касательное напряжение можно записать следующим образом:

$$\tau_w / \left(\mu \cdot \frac{5\nu}{x^2} \left(\frac{Gr_x^*}{5} \right)^{3/5} \right) = f''(0).$$

Данный параметр потока представлен на рис. 3, используя который можно рассчитать различные величины касательного напряжения для заданного набора условий.

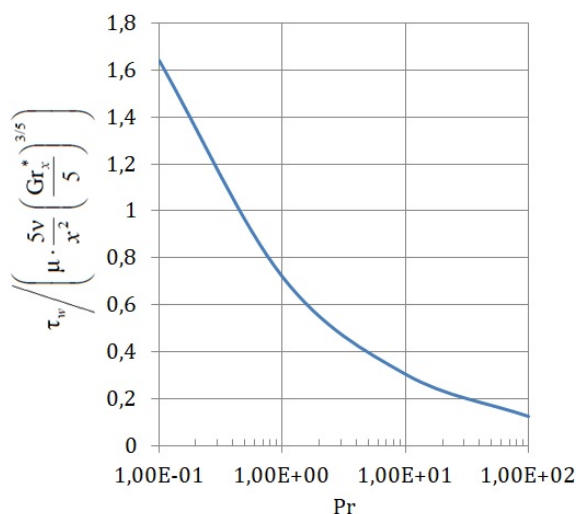


Рис. 3. Безразмерный параметр потока как функция числа Прандтля
Местное число Нуссельта выражается следующим образом:

$$Nu(x) = \frac{h(x) x}{\lambda} = \frac{q}{t_w - t_\infty} \frac{x}{\lambda}. \quad (11)$$

Температура поверхности t_w определяется из уравнения

$$t_w - t_\infty = \Theta(0) \frac{qx}{\lambda} \left(\frac{Gr_x^*}{5} \right)^{-1/5}.$$

Подстановка этого выражения в уравнение (11) дает параметр теплообмена:

$$Nu(x) \cdot \left(\frac{Gr_x^*}{5} \right)^{-1/5} = (\Theta(0))^{-1}. \quad (12)$$

Эта функция, зависящая от числа Прандтля, представлена на рис. 4. В работе [4] представлена полуэмпирическая формула в виде:

$$Nu(x) = \left(\frac{Gr_x^*}{5} \right)^{1/5} \left(\frac{5Pr^2}{4 + 9\sqrt{Pr} + 10Pr} \right)^{1/5}. \quad (13)$$

Рис. 4 иллюстрирует сравнение настоящего вычисления по формуле (12) с полуэмпирической формулой (13).

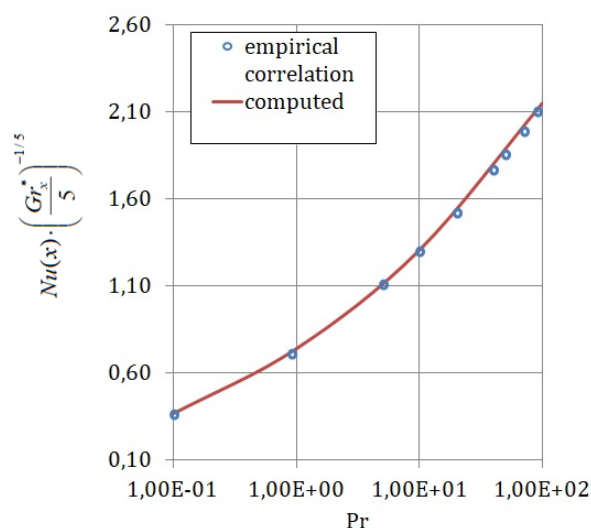


Рис. 4. Сравнение численного решения с полуэмпирической формулой (13)

Анализ расчетных и экспериментальных данных

Для проверки разработанной модели были проведены расчеты в условиях экспериментов [13; 14], в которых исследовали естественную конвекцию при различных числах Грасгофа, Прандтля у поверхности пластины с постоянным тепловым потоком. На рис. 5 и 6 показаны результаты сравнения представленной работы с экспериментальными данными.

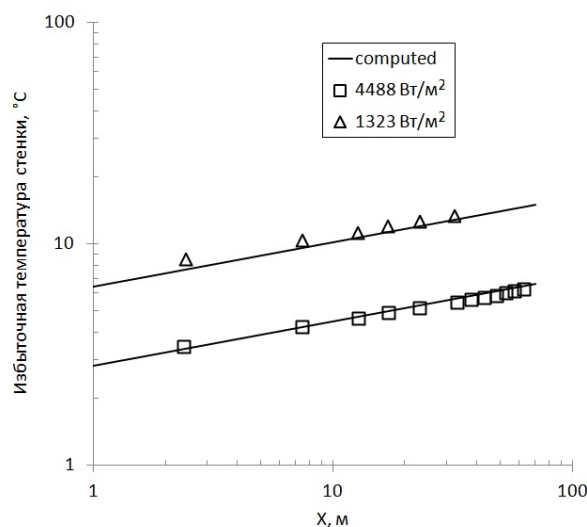


Рис. 5. Избыточная температура стенки в условиях эксперимента [13] в воде при $t_{\infty} = 25^{\circ}\text{C}$

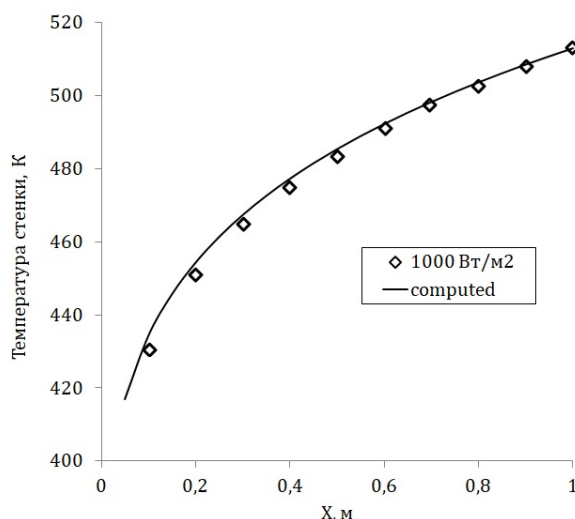


Рис. 6. Температура стенки в условиях эксперимента [14] в воздухе при $t_{\infty} = 300$ К

Заключение

Представлена модель ламинарной свободной конвекции у поверхности тепловыделяющего элемента в приближении неизо термической пластины с постоянным тепловым потоком. Рассмотрено решение нелинейных уравнений пограничного слоя для вертикальной поверхности с использованием методов, реализованных в среде Matlab. Полученные профили скорости и температуры для чисел Прандтля 0.01, 1, 10 и 100 находятся в хорошем согласии с данными, вычисленными ранее Спэрроу для ламинарной свободной конвекции на неизо термических вертикальных пластинах [9]. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными [13], [14]. Хорошее согласие с экспериментальными данными позволяет сделать вывод об эффективности и применимости представленной модели естественной конвекции.

Литература

1. Sparrow E.M., Gregg J.L. Similar solutions for laminar free convection from a non isothermal vertical plate // J. Heat Transfer. – 1956. – Vol. 80. – P. 379–387.
2. Pohlhausen E. Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung // Z. Angew. Math. Mech. – 1921. – Vol. 1. – S. 235–252.
3. Dotson J.P. Heat Transfer from a vertical plate by free convection // MS Thesis, Purdue University, W. Lafayette. Ind, 1954.
4. Goldstien R.J., Eckert E.R.G. The steady and transient free convection boundary layer on a uniformly heated vertical plate // Journal of Heat and Mass Transfer. – 1960. – № 1. – P. 208–218.
5. Mohammed H.A., Salman Y.K. Free convective heat transfer from a constant heat flux vertical circular tube with different entrance restrictions length // Energy Conversion and Management. – 2007. – № 48 – P. 2233–2243.
6. Balaj M. Investigation of convective heat transfer through constant wall heat flux micro/nano channels using DSMC // Int. Journal of Heat and Mass Transfer. – 2014. – № 71. – P. 633–638.
7. Jain A. Radiation and Chemical Reaction Effects on Unsteady Double Diffusive Convective Flow past an Oscillating Surface with Constant Heat Flux // ISRN Chemical Engineering. – 2013. – Vol. 13. url: <https://doi.org/10.1155/2013/846826>.

8. Джалурия И. Естественная конвекция. Тепло- и массообмен. – М.: Мир, 1983.
9. Sparrow E.M., Gregg J.L. Laminar free convection from a vertical plate with uniform surface heat flux // J. Heat Transfer. – 1956. – Vol. 78. – P. 435–440.
10. Лыков А.В. Теплообмен: справочник. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергия, 1978. – 479 с.
11. Гебхарт Б., Джалурия И., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен: в 2 кн.; пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 678 с.
12. Черный А.П. Особенности численного решения систем дифференциальных уравнений моделей электромеханических систем в программной среде Matlab // Електромеханічні і енергозберігаючі системи. – 2017. – № 2. – С. 33–48. – Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=30707735> (дата обращения: 20.12.2019).
13. Gebhart B. Transition and transport in a buoyancy driven flow in water adjacent to a vertical uniform flux surface // J. Heat Mass Transform. – 1978. – Vol. 21. – P. 1467–1479.
14. Vliet G.C. Natural convection local heat transfer on constant-heat-flux inclined surface // Journal of Heat Transfer. – 1969. – Vol. 91 (4). – P. 511–517.

Поступила в редакцию 18 февраля 2020 г.

UDC 004.942

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-3-36-44

Numerical Simulation of Laminar Free Convection along the Surface of a Fuel Element

A.V. Voronina

Dimitrovgrad Engineering and Technological Institute of the National Research Nuclear University MEPHI; Russia, Ulyanovsk region, 433511, Dimitrovgrad, Kuibyshev st., 294; AVVoronina@mephi.ru

The paper presents a model of laminar free convection along the surface of a fuel element, in the approximation of a non-isothermal plate with a constant heat flux. It is assumed that natural convection is stable, laminar, two-dimensional, without dissipation, and the fluid is Newtonian with constant properties. By converting variables by introducing similarity parameters into the differential equations of the boundary layer for a vertical surface, a system of differential equations is obtained. Subsequently, they are reduced to a first-order system and integrated using methods implemented in the Matlab environment. The substantiation of the choice of a method for solving this system of differential equations with a variable integration step was carried out for accuracy values $10^{-8} \dots 10^{-2}$. The velocity and temperature profiles are obtained for Prandtl numbers 0.01, 1, 10 and 100. These theoretical profiles are in good agreement with the data calculated by Sparrow and Gregg for a non-isothermal plate. The flow and heat transfer parameters (shear stress and Nusselt number) along the surface of a plate with a constant heat flux are presented. The results obtained are compared with experimental data. Good agreement with the experimental data published in the literature allows us to conclude that the presented model of natural convection is effective and applicable. The described approach can be applied to simulate fuel elements in the medium in order to determine heat transfer parameters and to justify safety

Keywords: *heat transfer, model, laminar convection, Matlab.*

Received 18 February 2020