УДК 517.9+43

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-3-24-30

М.К. Ризаев

Приложение метода стационарной теории возмущений к вычислению критических нагрузок в задаче продольного изгиба стержня

Дагестанский государственный университет; Россия, Республика Дагестан, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; Rizaev.56@mail.ru

В статье рассматривается вопрос нахождения приближенных критических нагрузок в задаче продольного изгиба прямолинейного стержня с одним свободным и другим защемленным концом, имеющей самые различные приложения при проектировании различных технических конструкций. Математической моделью этой задачи механики является краевая задача, порождаемая дифференциальным выражением второго порядка. С помощью метода стационарной теории возмущений вычислен коэффициент главного члена поправки в разложении собственных значений краевой задачи по степеням малого параметра возмущения в случае, когда функция, характеризующая упругие свойства материала стержня, приближается многочленом третьей степени. Возмущение содержит малый коэффициент, обеспечивающий корректность рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: *критическая нагрузка, краевая задача, собственные значения и функции, оператор, метод возмущений, малый параметр.*

Чтобы определить критические нагрузки в задаче продольного изгиба гибкого стержня с одним свободным и другим защемленным концами при выборе соответствующим образом системы координат, необходимо решить следующую краевую задачу [1, 2, 5]:

$$-E(x)\mathcal{J}(x)y''(x) = Py(x), 0 < x < l; \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(l) = 0. \tag{2}$$

В (1)–(2) l – это длина стержня, P – прилагаемая к свободному концу стержня сила, $E(x)$ – модуль упругости Юнга, $\mathcal{J}(x)$ – осевой момент инерции сечения, $y(x)$ – уклонение изогнутого стержня от исходного прямолинейного положения в точке с координатой x. Функция $y = y(x)$ задает уравнение формы стержня, принимаемой им под действием силы P.

Краевая задача (1)–(2) является наиболее простой математической моделью рассматриваемой задачи механики, при ее составлении не учтены многие аспекты реального процесса деформации, в частности возможное неупругое поведение материала стержня, явление укорочения стержня в результате сжатия. Учет этих и других деталей физического процесса искомой задачи механики приведет к существенному осложнению ее математической модели, а поэтому, как правило, решение полученной модели будет довольно логично.

В полученной краевой задаче требуется определить значения P_n параметра P, при которых эта задача имеет нетривиальные решения $y(x,\ P_n)$, представляющие уклонения стержня в точке x от прямолинейного положения. Эти значения P_n, при которых происходит изменение формы стержня (и как следствие потеря устойчивости механической системы), называются критическими. Функция $\wp(x) = E(x)\Im(x)$ называется жесткостью на изгиб. При произвольной функции $\wp(x)$ решение задачи (1)–(2) может натолкнуться на существенные трудности, ибо получить решение в замкнутой форме дифференциального уравнения (1) часто невозможно.

Данная задача рассматривалась в свое время выдающимся математиком Л. Эйлером. Не потеряла она свою актуальность и в настоящее время. Задачу предварительного приближенного вычисления допустимых критических нагрузок при проектировании технических конструкций приходится решать всем ученым, ведущим практические исследования.

1. Самосопряженный оператор задачи, главный член поправки критических нагрузок

Введем оператор

$$Hf(x) = -E(x)\Im(x)f''(x) \tag{3}$$

на пространстве функций

$$D(H) = \{f\epsilon C^2([0,l])|f(0) = 0, f'(l) = 0\}. \tag{4}$$

Как нетрудно заметить, решение краевой задачи (1)–(2) равносильно исследованию спектральных характеристик оператора H. Вопросы асимптотического распределения собственных значений операторов типа H, Штурма–Лиувилля, дифференциальных операторов произвольного порядка приводятся в источниках [2–4].

При постоянных характеристиках $E(x) \equiv E_0, \Im(x) = \Im_0$ оператор H вырождается в оператор H_0. В этом случае краевая задача (1)–(2), т. е. оператор H_0, имеет дискретный спектр, распределенный по закону

$$P_n = E_0\Im_0\left(\frac{2k+1}{2l}\right)^2\pi^2, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{5}$$

Собственные значения (5) являются однократными, им соответствуют следующие ортонормированные собственные функции

$$\psi_n(x; P_n) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right), n = 0, 1, 2, ... \tag{6}$$

Предположим, что $H = H_0 + B(\varepsilon)$, где $B(\varepsilon)$ – оператор, определенный на том же пространстве $D(H)$и зависящий от малого параметра ε. Очевидно, что оператор $B(\varepsilon)$ есть возмущение оператора H_0, спектральные характеристики которого (5)–(6) нам известны. К исследованию спектральных свойств оператора H применим метод стационарной теории возмущений [6–8], часто используемый при приближенном нахождении дискретных уровней энергии квантовых систем. Если $P_n(\varepsilon)$ есть изолированные однократные собственные значения возмущенного оператора H, а $\psi_n(x;\varepsilon)$ – соответствующие им собственные функции, то для малых значений параметра ε имеют место разложения

$$P_n(\varepsilon) = P_n + P_n^{(1)}\varepsilon + \cdots + P_n^{(k)}\varepsilon^k + \cdots, \tag{7}$$

$$\psi_n(x;\varepsilon) = \psi_n(x) + \psi_n{}^{(1)}(x)\varepsilon + \cdots + \psi_n{}^{(k)}(x)\varepsilon^k + \cdots. \tag{8}$$

Для выполнения приведенных разложений (7) – (8) предполагается, что при фиксированной функции $f\epsilon D(H)$ выполняется малость возмущения:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|B(\varepsilon)f\| = 0. \tag{9}$$

Определение всех коэффициентов степенных рядов (7)–(8) является тоже сложной задачей, поэтому интерес представляют первые коэффициенты $P_k^{(1)}$ и ${\psi_k}^{(1)}$, задающие главные члены поправок к исходным значениям P_kи ψ_k. Коэффициент $P_k^{(1)}$ определяется из равенства

$$P_k^{(1)} = (B(\varepsilon)\psi_k, \psi_k), \tag{10}$$

а второй коэффициент, функция ${\psi_k}^{(1)}$, находится согласно системе равенств

$$\left({\psi_k}^{(1)}, \psi_k\right) = 0, \qquad \left({\psi_k}^{(1)}, \psi_i\right) = \frac{(B\psi_k, \psi_i)}{P_k - P_i}, i \neq k. \tag{11}$$

Пусть возмущение $B(\varepsilon)$ оператора H_0 задается выражением

$$B(\varepsilon)f(x) = -\varepsilon E_0 \Im_0 Q_3(x) f''(x)\ , \tag{12}$$

где ε – малый параметр, $Q_3(x)$ – произвольный многочлен третьей степени. В этом случае оператор H действует по закону

$$Hf(x) = -E_0\Im_0[1 + \varepsilon Q_3(x)]f''(x),$$

и жесткость на изгиб $E(x)\Im(x)$ из соотношения (3), т. е. из краевой задачи (1)–(2), есть многочлен третьей степени, наименее отклоняющийся от оператора $-E_0\Im_0$:

$$E(x)\Im(x) = -E_0\Im_0 + [-\varepsilon E_0\Im_0 Q_3(x)]. \tag{13}$$

2. Асимптотика критических нагрузок по малому параметру

Сформулируем утверждение об асимптотике собственных значений возмущенного оператора и приведем его обоснование.

Теорема. Пусть $Q_3(x)$ есть произвольный многочлен третьей степени, $\hat{Q}_4(x)$ – любая его первообразная, а функция $E(x)\Im(x)$ задается равенством (12). Тогда для собственных значений краевой задачи (1) – (2) при достаточно малых ε справедлива асимптотика

$$P_k(\varepsilon) = E_0\Im_0\left(\frac{2k+1}{2l}\right)^2\pi^2\left\{1 + \varepsilon\frac{1}{l}\left\{\hat{Q}_4(l) - \hat{Q}_4(0) + [Q_3'(0) + Q_3'(l)]\left[\frac{l}{\pi(2k+1)}\right]^2 - 2Q_3'''(0)\left[\frac{l}{\pi(2k+1)}\right]^4\right\}\right\} + 0(\varepsilon^2), \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{14}$$

Доказательство. Из (10) и выражения для возмущения (12) следует, что для главного члена поправки ${P_k}^{(1)}$ к собственному значению P_k имеет место соотношение

$$P_k^{(1)} = -\varepsilon E_0\Im_0\frac{2}{l}\left[\frac{\pi(2k+1)}{2l}\right]^2\int_0^l Q_3(x)\sin^2\left[\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right]dx. \tag{15}$$

Пусть многочлен третьей степени $Q_3(x)$ задан выражением

$$Q_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

Очевидно равенство

$$S_0 = \int_0^l a_3\sin^2\left[\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right]dx = \frac{1}{2}a_3 l. \tag{16}$$

Поскольку

$$\int_0^l x\sin^2\left[\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right]dx = \frac{l^2}{4} - \frac{1}{2}\int_0^l x\cos^2\left[\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right]dx$$

и

$$\int_0^l x\cos\left[\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right]dx = -2\left[\frac{l}{\pi(2k+1)}\right]^2, \quad (17)$$

имеем равенство

$$S_1 = \int_0^l a_2\, x\sin^2\left[\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right]dx = \frac{1}{4}a_2 l^2\left\{1+\left[\frac{2}{\pi(2k+1)}\right]^2\right\}. \quad (18)$$

Проведя понижение степени тригонометрической функции подынтегрального выражения и последующее интегрирование одного тривиального интеграла, можно убедиться в справедливости равенства

$$\int_0^l x^2\sin^2\left[\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right]dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{l^3}{3} - \int_0^l x^2\cos^2\left[\frac{\pi(2k+1)}{l}x\right]dx\right\}. \quad (19)$$

Интегрируя по частям, выясняем, что

$$\int_0^l x^2\, cos\left[\frac{\pi(2k+1)}{l}x\right]dx = -\frac{2l}{\pi(2k+1)}\int_0^l x\, sin\left[\frac{\pi(2k+1)}{l}x\right]dx,$$

$$\int_0^l x\, sin\left[\frac{\pi(2k+1)}{l}x\right]dx = \frac{l^2}{\pi(2k+1)}.$$

Тогда в силу равенства (19) мы придем к равенству

$$S_2 = \int_0^l a_1 x^2\sin^2\left[\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right]dx = \frac{1}{6}a_1 l^3\left\{1+\frac{3!}{[\pi(2k+1)]^2}\right\}. \quad (20)$$

Мы фактически вычислили начальные моменты порядка n = 0, 1, 2 с коэффициентами a_{3-n} функции

$$f_k(x) = \frac{l}{2}\Psi_k^2(x, P_k) = sin^2\left[\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right]$$

по промежутку $[0, l]$. Вычислим теперь начальный момент третьего порядка

$$S_3 = a_0\int_0^l x^3\, sin^2\left[\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right]dx$$

с коэффициентом a_0. Понижение степени подынтегральной тригонометрической функции приводит к формуле

$$S_3 = \frac{a_0}{2}\left\{\frac{l^4}{4} - \int_0^l x^3 \cos\left[\frac{\pi(2k+1)}{l}x\right]dx\right\}. \qquad (21)$$

Упростим интеграл из полученного соотношения. При однократном интегрировании по частям в ней получим равенство

$$\int_0^l x^3 \cos\left[\frac{\pi(2k+1)}{l}x\right]dx = \frac{3l}{\pi(2k+1)}\int_0^l x^2 \sin\left[\frac{\pi(2k+1)}{l}x\right]dx. \qquad (22)$$

Точно так же можно установить справедливость равенства

$$\int_0^l x^2 \sin\left[\frac{\pi(2k+1)}{l}x\right]dx = \frac{l}{\pi(2k+1)}\left\{l^2 + 2\int_0^l x\cos\left[\frac{\pi(2k+1)}{l}x\right]dx\right\}. \qquad (23)$$

Согласно равенствам (17), (22)–(23) соотношение (21) для момента J_3 принимает вид

$$S_3 = \frac{1}{2}a_0 l^4\left\{\frac{1}{4} + 3\left[\frac{1}{\pi(2k+1)}\right]^2\left\{1 - \left[\frac{2}{\pi(2k+1)}\right]^2\right\}\right\}. \qquad (24)$$

Рассмотрим теперь сумму

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + S_3,$$

численно равную определенному интегралу из равенства (15). Очевидно, что

$$S = \frac{1}{z}\left(a_3 l + \frac{1}{2}a_2 l^2 + \frac{1}{3}a_1 l^3 + \frac{1}{4}a_0 l^4\right) + \left(a_2 + a_1 l + \frac{3}{2}a_0 l^2\right)\left[\frac{l}{\pi(2k+1)}\right]^2 - 6a_0\left[\frac{l}{\pi(2k+1)}\right]^4. \qquad (25)$$

Пусть $\hat{Q}_4(x)$ есть произвольная первообразная многочлена $Q_3(x)$. Тогда

$$\hat{Q}_4(l) - \hat{Q}_4(0) = \frac{1}{4}a_0 l^4 + \frac{1}{3}a_1 l^3 + \frac{1}{2}a_2 l^2 + a_3 l.$$

Поскольку $Q_3'(x) = 3a_0x^2 + 2a_1x + a_2$, то

$$Q_3'(x) + Q_3'(l) = 3a_0 l^2 + 2a_1 l + a_2, \qquad Q_3'''(0) = 6a_0.$$

Следовательно, равенство (25) принимает вид

$$S = \frac{1}{2}\left[\hat{Q}_4(l) - \hat{Q}_4(0)\right] + \frac{1}{2}\left[Q_3'(0) + Q_3'(l)\right]\left[\frac{l}{\pi(2k+1)}\right]^2 - Q_3'''(0)\left[\frac{l}{\pi(2k+1)}\right]^4. \qquad (26)$$

Поскольку сумма S численно равна интегралу из (15), согласно (26) имеем соотношение (14), требуется обосновать.

Аналогичные представления имеют место для многочленов произвольных степеней. Результат данного исследования в виде тезисов кратко изложен в работе автора [12]. Представления вида (14) наиболее эффективны при многочленах $Q_n(x)$, минимально отклоняющихся от нуля. Вопросы аппроксимации функций полиномами приведены в монографиях [9–11]. В частности, применительно к нашей задаче представляет существенный интерес вопрос приближения произвольных функций кубическими сплайнами, изложенный в [11].

Теория возмущений линейных операторов и задачи возмущений спектра операторов в гильбертовом пространстве приведены в различных источниках, в частности в [6–8]. Она имеет самые широкие приложения в математической физике. С математической точки зрения, квантовая теория рассеяния относится к теории возмущений самосопряженных операторов с абсолютно непрерывным спектром. При исследовании дифференциальных операторов более сложной структуры можно использовать их тонкие и глубокие свойства [13–14].

Литература

1. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968.

2. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.

3. *Костюченко А.Г., Саргсян И.С.* Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). – М.: Наука, 1979.

4. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). – М.: Наука, 1970.

5. *Тимошенко С.П.* Теория упругости. – М.: Наука, 1974.

6. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. – М.: Мир, 1982.

7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972.

8. *Фридрихс К.* Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1969.

9. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 2007.

10. *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. – М.: Наука, 1983.

11. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980.

12. *Ризаев М.К.* Приложение метода стационарной теории возмущений к вычислению критических нагрузок в задаче продольного изгиба стержня // Сборник материалов XIII Международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики». – Махачкала: Издательство ДГУ, 2019. – С. 136–138.

13. *Мирзоев К.А., Шкаликов А.А.* Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Математические заметки. – 2016. – Т. 99, № 5. – С. 788–793.

14. *Шкаликов А.А.* О базисных свойствах корневых функций дифференциальных операторов, содержащих спектральный параметр в краевых условиях // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 5. – С. 631–643.

Поступила в редакцию 25 февраля 2020 г.

UDC 517.9+43

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-3-24-30

Application of the Method of Stationary Perturbation Theory to the Calculation of Critical Loads in the Problem of Longitudinal Bending of the Rod

M.K. Rizayev

Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; Rizaev.56@mail.ru

The paper considers the approximate determination of critical loads in the problem of longitudinal bending of a straight rod with one free and other pinched end, which has various applications in the design of various technical structures. The mathematical model of this mechanics problem is the boundary value problem generated by a second-order differential expression. Using the method of stationary perturbation theory, the coefficient of the leading term of the correction in the expansion of the eigenvalues of the boundary value problem in powers of the small perturbation parameter is calculated in the case when the function characterizing the elastic properties of the rod material approaches a polynomial of the third degree. The perturbation contains a small coefficient that ensures the correctness of the problem under consideration.

Keywords: *critical load, boundary value problem, eigenvalues and functions, operator, perturbation method, small parameter.*

Received 25 February 2020