УДК 519.651

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-3-17-23

К.А. Рыбаков

Расчет спектральных характеристик оператора интегрирования дробного порядка относительно функций Уолша и Хаара

Московский авиационный институт; Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4; rkoffice@mail.ru

На основе соотношений для интегралов дробного порядка от блочно-импульсных функций получены простые алгоритмы расчета спектральных характеристик оператора интегрирования дробного порядка относительно функций Уолша и Хаара. Они являются частью алгоритмического и программного обеспечения спектрального метода.

Ключевые слова: *спектральный метод, спектральная характеристика, оператор дробного интегрирования, блочно-импульсные функции, функции Уолша, функции Хаара.*

Введение

Пусть $[0, T]$ – заданный отрезок, а $\{p_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$ – ортонормированная базисная система пространства $L_2([0, T])$. Тогда любую функцию $x(t) \in L_2([0, T])$ можно представить в виде функционального ряда

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i p_i(t), \quad t \in [0, T],$$

где

$$X_i = \int_0^T p_i(t) x(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Такое представление при фиксированной базисной системе $\{p_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$ единственно, поэтому упорядоченный набор X коэффициентов разложения X_i , который представляется бесконечной матрицей-столбцом, однозначно определяет функцию $x(t)$. Если две функции $x(t), y(t) \in L_2([0, T])$ связаны линейным преобразованием $y(t) = Ax(t)$ (A – линейный оператор), то соответствующие наборы X, Y коэффициентов разложения также связаны линейным преобразованием $Y = AX$, которое задается бесконечной матрицей A с элементами A_{ij} [1]:

$$A_{ij} = \int_0^T p_i(t) A p_j(t) dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Методы решения линейных операторных уравнений с помощью перехода к системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения искомой функции относят к спектральным методам или методам матричных операторов (операционных матриц) [2–4]. Далее будем использовать терминологию, принятую в [5], и называть бесконечные матрицы-столбцы коэффициентов разложения спектральными характеристиками функций, а бесконечные матрицы (операторы в пространстве спектральных характеристик функций) – спектральными характеристиками линейных

операторов. Терминология, применяемая в теории управления, несколько отличается, а именно используются термины «нестационарная спектральная характеристика сигнала» и «двумерная нестационарная передаточная функция линейного звена» [2, 6, 7].

Для эффективного применения спектральных методов требуется находить аналитические выражения для спектральных характеристик линейных операторов и формировать на их основе программное обеспечение. Краткий обзор работ в данной области приведен в [8].

В [9, 10] описана технология разработки алгоритмического и программного обеспечения расчета спектральных характеристик оператора дробного интегриродифференцирования (Римана–Лиувилля) относительно функций Уолша и Хаара. В этих работах с помощью символьного процессора системы компьютерной математики *Mathcad* были сформированы алгоритмы и программы расчета спектральной характеристики оператора дробного интегриродифференцирования относительно функций Хаара, а потом на основе известной связи функций Уолша и Хаара были сформированы алгоритмы и программы расчета спектральной характеристики того же оператора относительно функций Уолша. Апробация проводилась на решении уравнения Абеля. Полученные результаты позволяют найти спектральные характеристики оператора дробного интегриродифференцирования относительно функций Уолша и Хаара, однако сами алгоритмы расчета довольно сложны. Они могут применяться при решении различных прикладных задач, математические модели которых включают дифференциальные уравнения с производными дробного порядка [4, 11–14].

В данной статье предлагается более простой путь формирования соответствующих алгоритмов и программ с помощью блочно-импульсных функций. Такой подход нельзя назвать новым: для более простых операторов он применялся в [3] (использовалась связь функций Уолша и блочно-импульсных функций) и в [15] (на основе связи функций Хаара и блочно-импульсных функций). В настоящее время появляется много работ, в которых блочно-импульсные функции используются самостоятельно [16, 17], т. е. как неполная финитная система функций для аппроксимации решений уравнений различных типов, в том числе и уравнений с производными или интегралами дробного порядка. Цель работы состоит в формировании алгоритмов расчета спектральных характеристик оператора интегрирования дробного порядка относительно функций Уолша и Хаара с помощью перехода к блочно-импульсным функциям.

Функции Уолша и Хаара

Запишем соотношения для функций Уолша [2, 5, 10, 18]:

$$\Omega_i(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \begin{cases} r_0(t), & i = 0, \\ \prod_{n=0}^p r_{n+1}^{i_{p-n}}(t), & i = \sum_{v=0}^p i_v 2^{p-v} = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (2)$$

где $\{r_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ – функции Радемахера, p – наибольшая степень в двоичном представлении числа i , и для функций Хаара [2, 9, 18]:

$$\chi_i(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T, \quad i = 0, \\ \sqrt{2^n}, & \frac{2kT}{2^{n+1}} \leq t < \frac{(2k+1)T}{2^{n+1}}, & i = 2^n + k = 1, 2, \dots, \\ -\sqrt{2^n}, & \frac{(2k+1)T}{2^{n+1}} \leq t < \frac{2(k+1)T}{2^{n+1}}, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & \frac{2lT}{2^{n+1}} \leq t < \frac{(2l+1)T}{2^{n+1}}, & k, l = 0, 1, \dots, 2^n - 1, \\ & & k \neq l. \end{cases} \quad (3)$$

Обе системы функций – ортонормированные базисные системы пространства $L_2([0, T])$. Кроме того определим блочно-импульсные функции [3, 4, 14] на полуинтервале $[0, T)$:

$$\Pi_i(t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} 1, & t \in [ih, (i+1)h), \\ 0, & t \notin [ih, (i+1)h), \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, L-1, \quad h = \frac{T}{L},$$

где L – заданное натуральное число (количество блочно-импульсных функций).

Функции $\{\Pi_i(t)\}_{i=0}^{L-1}$ ортогональны, поскольку имеют попарно непересекающиеся носители, и нормированы в пространстве $L_2([0, T])$. Их можно определить с помощью сжатия и сдвигов индикатора множества $[0, T)$:

$$\Pi_i(t) = \frac{1}{\sqrt{h}} 1_{[0, T)} \left(\frac{t}{h} - i \right), \quad 1_{[0, T)} = \begin{cases} 1, & t \in [0, T), \\ 0, & t \notin [0, T). \end{cases} \quad (4)$$

Функции $\Pi_i(t)$ и $\chi_i(t)$ целесообразно доопределить в точке T по непрерывности.

Далее зафиксируем число $L = 2^n$, где n – натуральное число, и выразим функции Уолша (2) с номерами $i = 0, 1, \dots, L-1$ через блочно-импульсные функции (4) [3, 18]. Пусть

$$\Delta^{(0)} = 1, \quad \Delta_{2i,j}^{(k+1)} = \Delta_{2i+1,j}^{(k+1)} = \Delta_{2i,2^k+j}^{(k+1)} = -\Delta_{2i+1,2^k+j}^{(k+1)} = \Delta_{i,j}^{(k)}, \quad (5)$$

$$i, j = 0, 1, \dots, 2^k - 1, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Тогда матрица $\Delta^\Omega = \Delta^{(n)}/\sqrt{L}$ задает коэффициенты линейных комбинаций блочно-импульсных функций (4), определяющих функции Уолша (2):

$$\Omega_i(t) = \sum_{j=0}^{L-1} \Delta_{ij}^\Omega \Pi_j(t).$$

Несложно построить матрицу Δ^χ , задающую коэффициенты линейных комбинаций блочно-импульсных функций (4), определяющих функции Хаара (3) с номерами $i = 0, 1, \dots, L-1$:

$$\Delta_{0j}^\chi = \sqrt{L}, \quad j = 0, 1, \dots, L-1,$$

$$\Delta_{i+2^k, j+L2^{-k}}^\chi = \begin{cases} \sqrt{L2^k}, & j < L2^{-k-1}, \\ -\sqrt{L2^k}, & j \geq L2^{-k-1}, \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, 2^k - 1, \quad j = 0, 1, \dots, L2^{-k} - 1, \quad (6)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

В этом соотношении указаны только ненулевые элементы матрицы Δ^χ . Для ненормированных блочно-импульсных функций такая матрица приведена, например, в [15]. Следовательно,

$$\chi_i(t) = \sum_{j=0}^{L-1} \Delta_{ij}^\chi \Pi_j(t).$$

В результате, определяя элементы квадратной матрицы A^Π как

$$A_{ij}^{\Pi} = \int_0^T \Pi_i(t) A \Pi_j(t) dt, \quad i, j = 0, 1, \dots, L-1,$$

где A – линейный оператор, можно получить элементы усеченных спектральных характеристик этого линейного оператора (при конечных значениях индексов в формуле (1): $i, j = 0, 1, \dots, L-1$ относительно функций Уолша и Хаара [2, 6]:

$$A^{\Omega} = \Delta^{\Omega} A^{\Pi} [\Delta^{\Omega}]^T, \quad A^{\chi} = \Delta^{\chi} A^{\Pi} [\Delta^{\chi}]^T. \quad (7)$$

Матрицы Δ^{Ω} и Δ^{χ} – это ортогональные матрицы. Кроме того Δ^{Ω} – симметрическая матрица, поэтому в формуле для A^{Ω} транспонирование необязательно: $A^{\Omega} = \Delta^{\Omega} A^{\Pi} \Delta^{\Omega}$. Дополнительно через произведение Δ^{Ω} и Δ^{χ} можно выразить матрицу, связывающую функции Уолша и Хаара, которая использовалась, например, в [10].

Спектральные характеристики оператора интегрирования дробного порядка

Рассмотрим вычисление элементов матрицы A^{Π} при условии, что A – оператор интегрирования дробного порядка $\beta > 0$, а именно оператор Римана–Лиувилля [4, 11–14]. Тогда

$$Ax(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} x(\tau) d\tau$$

и

$$A_{ij}^{\Pi} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^T \Pi_i(t) \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \Pi_j(\tau) d\tau dt, \quad i, j = 0, 1, \dots, L-1. \quad (8)$$

В данном случае, как и в работах [19, 20], удобно воспользоваться функцией, которая порождает систему функций $\{\Pi_i(t)\}_{i=0}^{L-1}$ с помощью сжатия и сдвигов, т. е. функцией $1_{[0,T)}(t)$. Более того, достаточно рассмотреть случай $T=1$.

Найдем интеграл дробного порядка от функции $1_{[0,1)}(t)$:

$$\Phi^{\beta}(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} 1_{[0,1)}(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \begin{cases} \frac{t^{\beta}}{\beta}, & t < 1, \\ \frac{t^{\beta} - (t-1)^{\beta}}{\beta}, & t \geq 1, \end{cases}$$

или

$$\Phi^{\beta}(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} (t^{\beta} - (t-1)^{\beta} 1(t-1)),$$

где $1(t) = 1_{[0,+\infty)}(t)$ – единичная функция, или функция Хевисайда, $t \geq 0$.

Далее остается найти интегралы вида

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 1_{[0,1)}(t) \int_0^{t+k} (t+k-\tau)^{\beta-1} 1_{[0,1)}(\tau) d\tau dt = \int_0^1 \Phi^{\beta}(t+k) dt, \quad (9)$$

где результат при $k=0$ требуется для нахождения элементов главной диагонали матрицы A^{Π} , а при $k>0$ и $k<0$ – поддиагональных и наддиагональных элементов соответственно. Элементы матрицы A^{Π} с индексами i и j зависят только от их разности $i-j=k$. В результате имеем

$$\int_0^1 \Phi^\beta(t+k)dt = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \begin{cases} \frac{1}{\beta+1}, & k=0, \\ \frac{(k+1)^{\beta+1} - 2k^{\beta+1} + (k-1)^{\beta+1}}{\beta+1}, & k>0, \\ 0, & k<0, \end{cases}$$

или

$$\int_0^1 \Phi^\beta(t+k)dt = \frac{1}{\Gamma(\beta+2)} \begin{cases} (k+1)^{\beta+1} - 2k^{\beta+1} + (k-1)^{\beta+1} 1(k), & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases} \quad (10)$$

Учитывая нормирующий коэффициент $1/\sqrt{h}$ в формуле (4), связывающей функции $\Pi_i(t)$ и $1_{[0,T)}(t)$, из (8)–(10) получаем.

$$A_{ij}^\Pi = \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+2)} \begin{cases} (k+1)^{\beta+1} - 2k^{\beta+1} + (k-1)^{\beta+1} 1(k), & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$i, j = 0, 1, \dots, L-1, \quad k = i - j.$$

Аналогичный результат приведен в [4] и [15], но в последнем случае с другой нумерацией.

Отметим, что формула (10) получена в предположении, что $T = 1$, однако соотношение (11) справедливо для произвольного $T > 0$, поскольку значение T учтено в нормирующем коэффициенте.

Таким образом, алгоритмы расчета усеченных спектральных характеристик оператора интегрирования дробного порядка состоят в следующем. При фиксированном значении $L = 2^n$ нужно воспользоваться соотношениями (7), в которых элементы матриц Δ^Ω и Δ^χ определяются формулами (5) и (6) соответственно, а элементы матрицы A^Π задаются выражением (11). Отметим, что выбирать порядок усечения спектральных характеристик для функций Уолша и Хаара, отличный от 2^n , нецелесообразно.

Эти алгоритмы значительно проще алгоритмов, представленных в [9, 10]. На их основе нетрудно сформировать соответствующее программное обеспечение. Более того, они могут без изменений применяться и в случае $\beta \in (-1, 0)$, для которого результат работы алгоритмов – усеченные спектральные характеристики оператора дифференцирования дробного порядка $\alpha = -\beta \in (0, 1)$. Для расчета спектральной характеристики оператора дифференцирования дробного порядка $\alpha > 1$ можно воспользоваться свойством спектрального преобразования композиции линейных операторов: оператора дифференцирования дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$ и оператора дифференцирования целого порядка [5, 14]. Разработанные алгоритмы включены в пакет алгоритмов и программ спектрального метода [8].

Литература

1. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. Солодовников В.В., Семенов В.В., Пешель М., Недо Д. Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. – М.: Машиностроение, 1979. – 664 с.

3. *Латин С.В., Егунов Н.Д.* Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 496 с.
4. *Васильев В.В., Симаков Л.А.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. – Киев: НАН Украины, 2008. – 256 с.
5. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.* Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2015. – 392 с.
6. *Рыбин В.В.* Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. – М.: Изд-во МАИ, 2011. – 220 с.
7. *Пантелеев А.В., Бортаковский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. – М.: Инфра-М, 2016. – 583 с.
8. *Рыбаков К.А., Рыбин В.В.* Алгоритмическое и программное обеспечение расчета систем автоматического управления в спектральной форме математического описания // В кн. Современная наука: теоретические, практические и инновационные аспекты развития. Т. 2. – Ростов н/Д: Изд-во Международного исследовательского центра «Научное сотрудничество», 2018. – С. 171–199.
9. *Рыбаков К.А., Рыбин В.В.* Алгоритмическое и программное обеспечение расчета спектральной характеристики оператора дробного интегродифференцирования относительно функций Хаара // Машиностроение и компьютерные технологии. – 2018. – № 1. – С. 31–51.
10. *Рыбаков К.А., Рыбин В.В.* Алгоритмическое и программное обеспечение расчета спектральной характеристики оператора дробного интегродифференцирования относительно функций Уолша // Вестник СамГТУ. Сер.: Технические науки. – 2019. – № 4 (64). – С. 42–57.
11. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
12. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. – М.: Университетская книга, 2005. – 848 с.
13. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. – М.: Наука, 2005. – 199 с.
14. *Рыбаков К.А., Рыбин В.В.* Моделирование распределенных и дробно-распределенных процессов и систем управления спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 160 с.
15. *Mohammadi F.* Numerical solution of stochastic Ito-Volterra integral equations using Haar wavelets // Numer. Math. Theor. Meth. Appl. – 2016. – Vol. 9, № 3. – P. 416–431.
16. *Maleknejad K., Khodabin M., Rostami M.* A numerical method for solving m-dimensional stochastic Ito-Volterra integral equations by stochastic operational matrix // Comput. Math. Appl. – 2012. – Vol. 63, № 1. – P. 133–143.
17. *Maleknejad K., Khodabin M., Rostami M.* Numerical solution of stochastic Volterra integral equations by a stochastic operational matrix based on block pulse functions // Math. Comput. Model. – 2012. – Vol. 55, № 3–4. – P. 791–800.
18. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. – М.: Наука, 1987. – 344 с.
19. *Рыбаков К.А., Рыбин В.В.* Спектральные характеристики операторов дифференцирования и интегрирования относительно ортогональных финитных функций. I. Симметричные сплайны // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2019 (АПВПМ-2019). Международная конференция в рамках Марчуковских

научных чтений – 2019 (г. Новосибирск, 1–5 июля 2019 г.): материалы конф. – Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2019. – С. 423–430.

20. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Спектральные характеристики операторов дифференцирования и интегрирования относительно ортогональных финитных функций. II. Несимметричные сплайны // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2019 (АПВПМ-2019). Международная конференция в рамках Марчуковских научных чтений – 2019 (г. Новосибирск, 1–5 июля 2019 г.): материалы конф. – Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2019. – С. 431–437.

Поступила в редакцию 2 марта 2020 г.

UDC 519.651

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-3-17-23

Calculating Spectral Characteristics for Fractional Integration Operator with Respect to Walsh and Haar Functions

K.A. Rybakov

Moscow Aviation Institute; Russia, 125993, Moscow, Volokolamsk highway, 4; rkoffice@mail.ru

Simple algorithms for calculating the spectral characteristics of the fractional integration operator with respect to Walsh and Haar functions are formed. These algorithms are based on relations for fractional order integrals of block pulse functions, they are the part of the spectral method algorithms and programs.

Keywords: *spectral method, spectral characteristic, fractional integration operator, block pulse functions, Walsh functions, Haar functions.*

Received 2 March 2020