

## ФИЗИКА

УДК 538.9

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-2-57-66

**Б.М. Кумицкий<sup>1</sup>, Н.А. Саврасова<sup>2</sup>**

### Реологическое моделирование свойств материала в условиях плоского прессования композитов

<sup>1</sup> Воронежский государственный технический университет; Россия, 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84; [boris-kum@mail.ru](mailto:boris-kum@mail.ru);

<sup>2</sup> Всероссийский учебный научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина; Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых большевиков, 54а; [savrasova-nataly@mail.ru](mailto:savrasova-nataly@mail.ru)

В работе исследуется проблема плоского прямого прессования композиционных материалов, являющаяся одной из важных составляющих технологического процесса производства листового композита. Решение данной задачи проводится на основе реологической модели в предположении, что физико-механические свойства деформируемой среды соответствуют законам теории идеальной пластичности и принципам плоского деформированного состояния.

В рамках задачи в двух измерениях о пластическом тонком слое, заполняющем объем между двумя движущимися навстречу друг другу с постоянной скоростью жесткими, шероховатыми, параллельными пластинами, исследуется напряженно-деформированное состояние композиционного материала. При этом предполагается, что объемные нагрузки отсутствуют, а деформируемая несжимаемая среда подчиняется условию текучести Мизеса и ассоциированному закону течения. С учетом гипотезы Прандтля о линейности по толщине слоя касательного напряжения получены аналитические выражения для статических и кинематических параметров напряженно-деформированного состояния, позволяющие управлять процессом прессования.

Установлено, что компоненты скорости деформации квазистатического прессования прямо пропорциональны скорости сближения плит, а нормальные напряжения, действующие в направлении сжатия, уменьшаются к краям пластин по линейному закону и не зависят от скорости нагружения. Полученное выражение для усилия прессования дает возможность определить численное значение коэффициента трения скольжения среды на границе контакта с жестким штампом.

**Ключевые слова:** реологическая модель, прессование, условие пластичности, предел текучести.

### Введение

Развитие и совершенствование современной электроники, авиационной промышленности и строительных технологий невозможно представить без применения новых конструкционных материалов, среди которых особое место занимают композиты [1–3]. Композит – это конструкционный материал, состоящий из нескольких компонентов: матрицы (связующего) и армирующего материала (наполнителя), усиливающего его элементы в виде нитей, волокон, частиц и т. д.

Механическое поведение композитов определяется соотношением свойств армирующих элементов и матрицы, а также прочностью связи между ними.

Способы изготовления новых композиционных материалов и методы исследования напряженно-деформированного состояния в процессе прессования изделия из композитов остаются актуальными задачами механики деформируемого твердого тела. Решение любой задачи, пригодной для практического использования, начинается, как правило, с формализации разработки физико-математической модели. Моделирование систем и процессов позволяет проводить многофункциональный анализ и выработать оптимальную стратегию ведения технологического процесса [4–6]. К настоящему времени разработан ряд математических моделей, описывающих процессы, протекающие в условиях деформации композиционных материалов, в частности при плоском прессовании [7–9].

Предложена математическая модель [4], описывающая процессы, протекающие в вязкой несжимаемой жидкости, находящейся в тонком слое между движущимися навстречу друг другу параллельными плоскостями конечных прямоугольных размеров. Полученные при этом параметры напряженно-деформированного состояния позволяют управлять процессом прессования фанеры и других слоистых материалов [10].

Ранее были изложены результаты теоретических и экспериментальных исследований процесса прессования порошковых материалов в условиях самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС) [11]. С позиций математического моделирования рассматривается проблема прессования продуктов СВС в условиях осесимметричного и плоского прессований. А также было показано, что для прогнозирования результатов спекания реальных изделий требуется численное моделирование на основе принципов механики сплошной среды [12].

Математическая модель, основанная на фундаментальных законах сохранения массы, импульса и энергии в рамках механики деформированного твердого тела в условиях прессования древесины с учетом анизотропии, предложена в работе [13]. Представлены результаты моделирования процесса плоского прессования плит из отходов древесины и термопластов [10, 14], произведена качественная оценка по толщине плит температур, степени затвердевания термопласта, нормальных и касательных напряжений на границах раздела фаз. По проблемам прессования предложены некоторые рекомендации.

Приведенный анализ изложенных и других известных моделей [15, 16] показывает, что в большинстве из них описывается поведение связующего, причем в условии горячего прессования, и не касаются свойств материала в целом. Кроме того, в основе предлагаемых моделей лежат вязкоупругие свойства среды, соответствующие реальным материалам не в полной мере.

### Цель работы и постановка задачи

Цель предлагаемого исследования – разработка физико-математической модели, которая в рамках деформированного твердого тела и уравнений идеальной пластичности смогла бы, по крайней мере, приблизенно описать реологические свойства композиционного материала в процессе плоского прессования. Решение данной проблемы проведем в соответствии с методикой на примере полусухого холодного прессования гипсостружечных плит (ГСП), состоящих на 83 % из гипса (матрицы), на 15 % из древесной стружки (наполнителя) и 2 % воды [3]. Из гипсостружечной массы формуют заготовки, которые отправляются под пресс для затвердевания. В результате получается достаточно плотный материал относительно низкой себестоимости с обширной обла-

стью использования: устройство полов, внутренняя отделка стен и потолков, каркасное домостроение и т. д.

Итак, пусть пространство между двумя жесткими шероховатыми параллельными пластинаами, движущимися навстречу друг другу с постоянной скоростью  $u$ , заполнено композиционным материалом, реологические свойства которого соответствуют модели идеальной пластичности. Принципиальная схема деформации среды представлена на рис. 1.

Предположим, что плоскость течения исследуемой среды определяется плоскостью  $(x, y)$ , объемные силы отсутствуют, а скорость  $u$  и смыкания пластин мала. Пренебрегая упругими деформациями, при условии, что все величины не зависят от  $z$ , рассмотрим пластическое течение в двух измерениях.

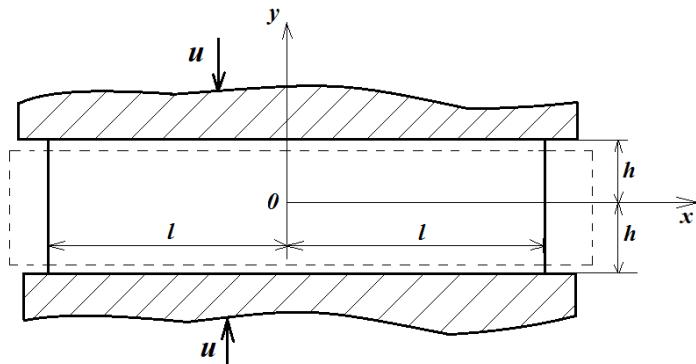


Рис. 1. Сжатие тонкого слоя композитной заготовки между сближающимися пластинами  
( $-l < x < l; y = \pm h$ )

Тогда уравнения равновесия примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненты напряжения, отнесенные к осям  $x, y$ .

Дифференцируя вторично (1) и (2) с последующим вычитанием и используя условие пластичности Мизеса

$$\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2, \quad (3)$$

получим выражение

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = \pm 2 \frac{\partial^2 \left( \sqrt{\kappa^2 - \tau_{xy}^2} \right)}{\partial x \partial y}. \quad (4)$$

Здесь  $k$  – предел текучести, равный максимальному значению касательных напряжений, который для условия текучести Мизеса принимает значение  $k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$

( $\sigma_0$  – константа материала). Будем искать решение (4), при котором напряжение  $\tau_{xy}$  является функцией, зависящей только от  $y$ . В этом случае оно запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 0,$$

которое является линейной функцией [17]

$$\tau_{xy} = -\frac{ky}{h} \quad (5)$$

с граничными условиями  $\tau_{xy} = \pm k$  при  $y = \mp h$ . Это соответствует состоянию течения деформируемой среды по плоскости контакта вправо.

С учетом этого дифференциальные уравнения равновесия (1) и (2) принимают вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{k}{h} \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

интегрирование которых дает

$$\sigma_x = \frac{k}{h}x + F(y) \quad \sigma_y = G(x), \quad (7)$$

где  $F(y)$  и  $G(x)$  – произвольные функции, определяемые из условия пластичности (3), которое с учетом (5) запишется в виде:

$$F(y) - G(x) + \frac{kx}{h} = \pm 2k \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}. \quad (8)$$

Так как уравнение (8) удовлетворяется при любых значениях  $x$  и  $y$ , то справедливы для  $F(y)$  и  $G(x)$  следующие соотношения:

$$F(y) = -P \pm 2k \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} \quad (9)$$

$$G(x) = -P + \frac{kx}{h}, \quad (10)$$

где  $P$  – произвольная постоянная. При этом условии выражениям (7) удовлетворяют две системы напряжений подобного типа:

$$\sigma_x = -P + \frac{kx}{h} \pm 2k \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}, \quad (11)$$

$$\sigma_y = -P + \frac{kx}{h}. \quad (12)$$

Для нахождения распределения скоростей, соответствующих напряжениям (5), (11), (12), необходимо определить траекторию линий скольжения [17]. С этой целью предположим, что в общем случае главные оси наклонены под углами  $\alpha$  и  $\alpha + \pi/2$ , тогда очевидно, что направления сдвигов будут наклонены к ней под углами  $\beta$  и  $\beta \pm \pi/2$ , где  $\beta = \alpha + \pi/4$  (рис. 2).

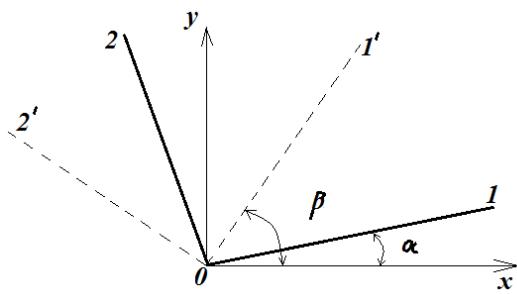


Рис. 2. Общий случай взаимного расположения осей координат  $(x, y)$ , направлений главных осей  $(1, 2)$  и осей сдвигов  $(1', 2')$

Используя известные равенства  $\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$  и  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$  и заменив  $\alpha$  на  $(\beta - \pi/4)$ , компоненты напряжений (11), (12) и (5) соответственно можно, учитывая только положительный знак напряжения (11), представить в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_0 + k \sin 2\beta \\ \sigma_y &= \sigma_0 - k \sin 2\beta \\ \tau_{xy} &= -k \cos 2\beta.\end{aligned}\quad (13)$$

Тогда дифференциальные уравнения двух систем линий скольжения запишутся:

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tg}\beta = \frac{1 - \cos 2\beta}{\sin 2\beta} = \frac{2(k + \tau_{xy})}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (14)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\beta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2(k + \tau_{xy})}. \quad (15)$$

Подставляя в (14) компоненты напряжений (5), (11), (12), получим дифференциальные уравнения одной системы линий скольжения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{h - y}{\sqrt{h^2 - y^2}}, \quad (16)$$

интегрирование которой в подстановке  $y = h \cos \Theta$  дает уравнение семейства циклоид, для которого производная (16) всегда положительна, поэтому необходимо рассматривать только ту часть, где с ростом  $x$  возрастает  $y$

$$\begin{cases} y = h \cos \Theta \\ x = -h(\Theta + \sin \Theta) + A. \end{cases} \quad (17)$$

Аналогично вторая система линий скольжения, определяемая уравнением (15), дает циклоиды

$$\begin{cases} y = h \cos \Theta \\ x = h(\Theta - \sin \Theta) + B, \end{cases} \quad (18)$$

для которых должны рассматриваться участки уменьшения  $y$ . Произвольные постоянные  $A$  и  $B$  должны определяться из граничных условий.

С целью физической интерпретации полученных результатов рассмотрим часть моделируемой среды, деформируемой по схеме рис. 1 и ограниченной линиями  $x = 0$ ,  $x = l$ ,  $y = \pm h$  (рис. 3).

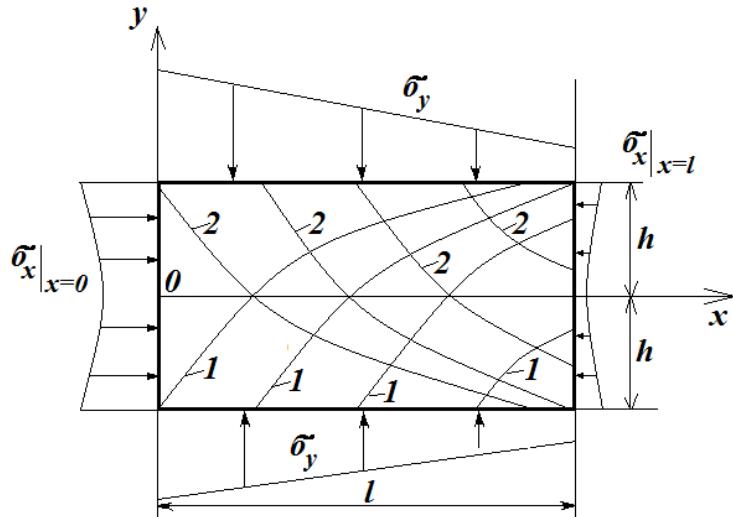


Рис. 3. Схема распределения линий скольжения и нормальных напряжений в деформируемой среде между шероховатыми плитами: 1 – семейство линий скольжения (17); 2 – семейство линий скольжения (18)

Плоскости  $y = \pm h$ , очевидно, будут находиться под напряжениями (12)

$$\sigma_y = -P + \frac{kx}{h},$$

в которых постоянная  $P$  находится из граничного условия:

$$\sigma_y|_{x=l} = 0 = -P + \frac{kl}{h},$$

откуда

$$P = \frac{kl}{h}.$$

Тогда выражение (12) примет вид:

$$\sigma_y = \frac{k}{h}(x - l). \quad (19)$$

На плоскостях  $x = 0$  и  $x = l$  действуют напряжения

$$\sigma_x|_{x=0} = \frac{kl}{h} + 2k \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}, \quad (20)$$

$$\sigma_x|_{x=l} = 2k \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}, \quad (21)$$

направления действия которых и качественное их распределение показаны на рис. 3. Видно линейное уменьшение напряжений  $\sigma_y$  от центра к периферии сжимающихся пластин и степенная зависимость  $\sigma_x$  по толщине деформируемого слоя, что обеспечивает движение материала вправо. На этом же рисунке схематически изображены семейства

ортогональных линий скольжения, представляющие собой циклоиды в соответствии с уравнениями (17) и (18).

Для нахождения распределения скоростей деформаций соответствующих напряжений (5), (11), (12) воспользуемся зависимостями между напряжением и деформацией, которые для случая абсолютно несжимаемого тела в рамках плоской деформации [17] имеют вид:

$$S_x = 2\varphi \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad (22)$$

$$S_y = 2\varphi \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad (23)$$

$$\tau_{xy} = \varphi \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad (24)$$

где  $v_x$  и  $v_y$  – компоненты скорости нагружения;  $\varphi$  – неизвестная функция, содержащая в себе скорость деформации;  $S_x$  и  $S_y$  – компоненты девиатора напряжений, которые для случая совпадения главных осей скорости деформации с главными осями девиатора напряжений и введенными ранее обозначениями принимает вид:

$$S_x = k \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}, \quad (25)$$

$$S_y = -k \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}. \quad (26)$$

При выборе величины

$$\varphi = \frac{k \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}}{2u} \quad (27)$$

уравнение (23) удовлетворяется решением

$$v_x = -\frac{y}{h} u, \quad (28)$$

соответствующим сближению плоскостей со скоростью  $u$ . Подставляя подобную величину в (22), получим

$$v_x = \frac{ux}{h} + \xi(y), \quad (29)$$

где  $\xi(y)$  определяется из условия, что  $v_x$  и  $v_y$  удовлетворяют (24). Для этого необходимо, чтобы

$$d[\xi(y)] = -\frac{2uydy}{h\sqrt{h^2 - y^2}},$$

откуда  $\xi(y) = 2u \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}$ , а выражение (29) для скорости принимает вид:

$$v_x = \frac{ux}{h} + 2u \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}. \quad (30)$$

Видно, что компоненты скорости (28) и (30) удовлетворяют требуемым условиям и соответствуют пластичному материалу, который выдавливается вправо в процессе плоского прессования, причем скорость (30) на выходе из пластин равна

$$v_x|_{x=l} = \frac{ul}{h}. \quad (31)$$

Следует заметить, что полученные компоненты скорости  $v_x$  и  $v_y$  пропорциональны скорости сближения пластин, в то время как соответствующие им напряжения не зависят от скорости нагружения, что находится в противоречии с выводами задачи [4], в которой используется модель вязкой жидкости.

Анализ результатов представленного исследования позволяет сделать следующие выводы.

### Выводы и заключения

1. Предложена физико-математическая модель, которая в рамках плоской деформации и принципов идеальной пластичности описывает свойства материала в процессе прямого прессования композита.

2. Получены параметры напряженно-деформированного состояния в предположении квазистатического процесса прессования, позволяющие получать распределение нормальных напряжений по толщине и плоскости деформируемого слоя. Установлено, что напряжения в направлении сближения пластин линейно уменьшаются от центра к периферии и не зависят от скорости деформирования.

Нормальные напряжения, действующие в плоскости деформирования, изменяются по степенному закону пропорционально толщине слоя и принимают нулевые значения в срединной плоскости.

3. Если использовать отрицательное значение для  $\sigma_x$  в (11), то для практического использования данного решения следует иметь в виду состояние, при котором деформируемый материал будет нагнетаться через сечение  $x = l$ , заставляя сжимающие плоскости двигаться наружу, удаляясь друг от друга.

4. Получены кинематические характеристики процесса прессования – компоненты скорости сближения плоскостей, являющиеся касательными в каждой точке линиям скольжения, а величина их прямо пропорциональна скорости прессования.

Для исследования представленных теоретических расчетов по напряженно-деформируемому состоянию в практических целях необходимо проведение эксперимента по изучению распределения напряжений прессования в удаленных от центра прессования точках.

### Литература

1. Анциферов В.Н., Перельман В.Е. Механика процессов прессования порошковых и композиционных материалов. – М.: Наука, 2001. – 628 с.

2. Михайлин Д.А. Волокнистые полимерные композиционные материалы в технике. – СПб.: НОТ, 2010. – 720 с.
3. Козлов Г.В., Зайков Г.В., Стоянов О.В., Кочнев А.М. Дисперсно-наполненные полимерные нанокомпозиты. – Казань: Изд-во КНИГУ, 2012. – 512 с.
4. Кумицкий Б.М., Саврасова Н.А., Кантиева Е.В. Математическое моделирование процесса склеивания древесного шпона в условиях плоского прессования фанеры // Лесотехнический журнал. – 2018. – Т. 8, № 2 (30). – С. 204–212.
5. Kumitsky B.M., Savrasova N.A., Sedaev A.A. Mathematical modeling of thermal process in freezing (thawing) of wet soil // Russian Journal of Building Construction and Architecture. – 2019. – № 2(42). – Р. 16–24.
6. Цеменко В.Н., Рудской А.И., Рыбин Ю.И. Теория и моделирование процессов деформирования порошковых и пористых материалов. – СПб.: Наука, 2012. – 416 с.
7. Гун Г.Я. Математическое моделирование процессов обработки материалов давлением. – М.: Наука, 1979. – 294 с.
8. Дмитриев О.С., Мищенко С.В., Дмитриев А.О. Метод исследования параметров течения связующего при отверждении композитов // Вестник ТГТУ. – 2005. – Т. 11, № 1А. – С. 53–61.
9. Котенко В.Д., Руденко Б.Д., Изотов В.Т. Моделирование свойств и процессов реактопластов. – М.: Изд-во МГУЛ, 2005. – 284 с.
10. Саврасова Н.А., Агапов А.Д., Кумицкий Б.М. Математическое моделирование процесса плоского прессования слоистых пластиков // Современные проблемы теории машин. – Новокузнецк: Изд-во НИЦ МС, 2018. – С. 50–55.
11. Федотов А.Ф., Амосов А.П., Радченко В.П. Моделирование процесса прессования порошковых материалов в условиях самораспространяющегося высокотемпературного синтеза. – М.: Машиностроение, 2005. – 282 с.
12. Бураго М.Г., Никитин И.С. Математическая модель для расчета прессования и спекания порошковых материалов // Современные проблемы математического моделирования. – 2017. – С. 14–20.
13. Дорняк О.Р. Математическое моделирование процесса прессования древесины в различных направлениях механической анизотропии // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. Специальный выпуск «Композиционные материалы». – 2005. – С. 85–92.
14. Плотников Н.П. Совершенствование технологии производства древесных плитных материалов. – Новосибирск, 2013. – 112 с.
15. Логинов Ю.Н., Коитов В.В. Метод конечных элементов в описании напряженно-деформированного состояния процесса прессования. – Екатеринбург: УРФУ, 2010. – 320 с.
16. Мищенко С.В., Дмитриев О.С., Шаповалов А.В., Кириллов В.Н. Математическое моделирование процесса отверждения изделий из полимерных композиционных материалов методом вакуумного автоклавного формования в технологическом пакете // Вестник ТГТУ. – 2001. – № 1. – С. 32–39.
17. Ишлинский А.Ю. Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.

Поступила в редакцию 27 декабря 2019 г.

UDC 538.9

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-2-57-66

## Rheological Modeling of Material Properties under Conditions of Flat Pressing of Composites

**B.M. Kumitsky<sup>1</sup>, N.A. Savrasova<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Voronezh State Technical University; Russia, 394006, Voronezh, 20-Anniversary of October st., 84; [boris-kum@mail.ru](mailto:boris-kum@mail.ru);

<sup>2</sup> Military Educational and Scientific Centre of Air Forces “N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force academy”; Russia, 394064, Voronezh, Starykh Bolshevikov st., 54a; [savrasova-nataly@mail.ru](mailto:savrasova-nataly@mail.ru)

The paper investigates the problem of flat direct pressing of composite materials. This is a problem in the manufacturing process of the sheet composite. The solution to the problem is based on the rheological model. The model assumes that the physic-mechanical properties of the deformable medium correspond to the laws of the theory of ideal plasticity. We assume that there are no bulk loads. We consider the medium to be incompressible and subject to the yield condition. We obtained analytical expressions for the static and kinematic parameters of the stress-strain state. This will allow you to control the pressing process.

It has been established that the components of the deformation rate of quasi-static pressing are directly proportional to the plate approach speed. An expression for the pressing force is obtained. This makes it possible to determine the numerical value of the sliding friction coefficient of the medium at the contact boundary with a hard stamp.

Keywords: *rheological model, pressing, plasticity condition, yield strength.*

*Received 27 December 2019*