УДК 517.512

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-2-53–56

М.С. Алиев

Об одной классификации линейно независимых систем функций

Дагестанский государственный университет; Россия, Республика Дагестан, 367000, г. Махачкала ул. М. Гаджиева, 43а; aliev.mingazhudin@yandex.ru

В статье дается определение типа системы непрерывных и линейно независимых на [a, b] функций. Приведены примеры систем различных типов. Доказана теорема: каждая система из n + 1 непрерывных, линейно независимых на [a, b] функций будет определенного типа $0\leq \sigma \leq n+1$.

Ключевые слова: *функция, определитель, минор, тип системы*.

Непрерывные на $[\text{a}, b]$ функции $\{u_i(x)\}_{i=0}^{n}$, для которых определитель

$$(1)\quad \mathrm{D}\begin{pmatrix} u_{0,} \dots, & u_n \\ x_1 \dots, & x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_0(x_1) & \dots\dots & u_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_0(x_{n+1}) & \dots. & u_n(x_{n+1}) \end{vmatrix} \neq 0$$

для любого набора различных точек $\{x_k\}_{k=0}^{n} \in [a, b]$, называется системой Чебышева.

Определение. Систему непрерывных и линейно независимых на $[a, b]$ функций $\{u_i(x)\}_{i=0}^{n}$ назовем системой типа σ $(0 \leq \sigma \leq n)$, если:

1) для любого набора точек а $\leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} \leq b$ в определителе $\mathrm{D}\begin{pmatrix} u_{0,} \dots, & u_n \\ x_1, \dots, & x_{n+1} \end{pmatrix} = 0$ существуют I + 1 строк $(\sigma \leq i \leq n)$, по которым все миноры i + 1 порядка равны нулю;

2) по крайней мере в одном таком миноре $i + 1$ порядка все дополнительные миноры $D_i^j (j = 1, 2, \dots, i+1)$ элементов хотя бы одного столбца отличны от нуля, и в ряду $D_1^i, D_2^2, \dots, D_{i+1}^i$ имеется не более *i-σ* перемен знака, причем найдется набор точек $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$, для которого в этом ряду будет точно *i-σ* перемен знака.

Тип системы функций Чебышева положим равным n + 1.

Приведем примеры систем функций различных типов.

1. Функции $\{u_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$ будут системой типа *n*, если для всех точек $\{x_i\}_{i=1}^{n+1} \in [a, b]$, в которых $\mathrm{D}\begin{pmatrix} u_{0,} \dots, & u_n \\ x_1, \dots, & x_{n+1} \end{pmatrix} = 0$, дополнительные миноры D_i^n $(i = 1, 2, \dots, n+1)$ отличны от нуля и одного знака. Это будет, например, если *n* функций образуют систему Чебышева.

2. Тип системы функций $\{x^{r_i}\}_{i=1}^{n+1}$, где $r_1 < r_2 < \cdots < r_{n+1}$ – натуральные числа при $0 <$ a $< b < \infty$ $(-\infty < a < b < 0)$, будет типа n + 1 [1].

3. Тип системы x, $x^2, \dots, x^{n+1}$ на $[a, b]$ $(a \leq 0 \leq b)$ равен нулю, ибо при $x_i = 0$ все миноры по этой строке равны нулю.

4. Функции $u_{k-1}(x) = \{1 - kx^{k-1}\}_{k=2}^{n+1}$ образуют систему типа $\sigma = 0$ на $[0, 1]$.

В каждом определителе $D\begin{pmatrix} u_1,\dots, & u_n \\ x_1,\dots, & x_n\end{pmatrix} = 0$ миноры $D_1^{n-1}, D_2^{n-1}, \dots, D_n^{n-1}$ по первым $n-1$ столбцам отличны от нуля и в этой последовательности будет n-1-0 перемен знака. Ввиду громоздкости доказательства ограничимся $n = 3$.

$$D\begin{pmatrix} u_1, u_2, & u_3 \\ 0, \frac{1}{2}, & 1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0,\ D_1^2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 \end{vmatrix} > 0, D_2^2 < 0, D_3^2 > 0,$$

т. е. в ряду D_1^2, D_2^2, D_3^2 имеется i-0 = 2–0 = 2 перемен знака. Примеры 3 и 4 показывают необходимость обоих пунктов определения типа системы.

5. Функции $u_k(x) = x^{2k},\ k = 0,\ 1,\ 2, \dots, n$ образуют систему типа 1 на $[a,\ b]$ при $a<0<b$. Определитель (1) равен нулю при $x_1 = -x_2$ все миноры второго порядка по двум строкам равны нулю. В каждом таком миноре $D_1^1,\ D_2^1$ одного знака.

6. Тип системы функций $\{x^i\}_{i=0}^n$ на любом $[a, b], -\infty < a < b < \infty$ равен $n + 1$, ибо определитель Вандермонда

$$D\begin{pmatrix} 1, x, & x^2, \dots, & x^n \\ x_0, & x_1, \dots, & x_n\end{pmatrix} = \prod\nolimits_{0\le i<j\le n} (x_j - x_i) \neq 0.$$

7. Исключив из системы функций $\{x^i\}_{i=0}^n$ функцию x^{n-1}, получим

$$D\begin{pmatrix} 1, & x, \dots, x^{n-2} & x^n \\ x_0, & x_1, \dots, & x_{n-1}\end{pmatrix} = \prod\nolimits_{0\le i<j\le n-1} (x_j - x_i) \left(\sum\nolimits_{i=0}^n x_i\right).$$

При a$< 0 < b$ сумма $\sum_{i=0}^n x_i$ может равняться нулю. Тип системы $n-1$.

8. Исключив из системы $\{x^i\}_{i=0}^n$ функции x^{n-2}, x^{n-1}, получим

$$D\begin{pmatrix} 1, & x, \dots, x^{n-3}, & x^n \\ x_0, & x_1, \dots, & x_{n-2}\end{pmatrix} = \prod\nolimits_{0\le i<j\le n-2} (x_j - x_i) \left(\sum\nolimits_{i,j=0}^{n-2} x_i x_j\right) \neq 0$$

на любом сегменте $[a,\ b]$, так как квадратичная форма $\sum_{i,j=0}^{n-2} x_i x_j > 0$.

Тип системы равен n – 1.

9. Исключив из системы $\{x^i\}_{i=0}^n$ функции $x^{n-3}\ x^{n-2}, x^{n-1}$, получим

$$D\begin{pmatrix} 1, & x, \dots, x^{n-4}, & x^n \\ x_0, & x_1, \dots, & x_{n-3}\end{pmatrix} = \prod\nolimits_{0\le i<j\le n-3} (x_j - x_i) \left(\sum\nolimits_{i,j=0}^{n-3} x_i^{k_1} x_j^{k_2}\right),$$

$k_1 + k_2 = 3$. При a $< 0 <$ b определитель может обратиться в нуль.

Пусть n – четное число. Положив $x_0 = -c_1, x_{n-3} = c > 0$, получим

$$\sum_{i,j=0}^{n-3} x_i^{k_1} x_j^{k_2} = \sum\nolimits_{i=1}^{n-4} 2c_1^2\, x_i + \sum_{i,j=1}^{n-4} x_i^{k_1} x_j^{k_2}.$$

Далее, положив $x_1 = -c_2, c_{n-4} = c_2 < c_1$, получим

$\sum_{i,j=0}^{n-3} x_i^{k_1} x_j^{k_2} = \sum_{i=2}^{n-5} 2c_1^2\, x_i + \sum_{i=2}^{n-5} 2c_2^2\, x_i + \sum_{i,j=2}^{n-5} x_i^{k_1} x_j^{k_2}$.

Выбрав $c_1 > c_2 > \dots > c_{\frac{n-2}{2}} > 0$, получим в сумме нуль. При нечетном n положим $c_{\frac{n-3}{2}} = 0$ и повторим наши рассуждения. Тип системы n – 2.

Далее предполагается $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ и вместо $\prod_{1\le i<j\le n+1} (x_j - x_i)$ шем $\prod(1, n+1)$.

10) Рассмотрим систему функций $1, x, \dots, x^{n-2}, x^n, x^{n+1} + px^{n-1}$ на $[-a, a]$.

Покажем, что при любом p>0 тип системы равен n.

$$D\begin{pmatrix} 1, & x, \dots, x^{n-2}, x^n, & x^{n+1} + px^{n-1} \\ x_1, & x_2, \dots, & x_{n+1}\end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} 1, & x, \dots, x^{n-2}, x^n, & x^{n+1} \\ x_1, & x_2, \dots, & x_{n+1}\end{pmatrix} +$$

$+\,p\,D\begin{pmatrix}1, & x,\dots,x^{n-2},x^{n} & x^{n-1}\\ x_1, & x_2,\dots, & x_{n+1}\end{pmatrix}=\prod(1,n+1)\left(\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n+1}x_ix_j-p\right)=0.$

При $\sum_{i=1}^{n}x_i\neq 0,\ x_{n+1}=\frac{p-\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}x_ix_j}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$ и a такой, чтобы $x_{n+1}\in[-a,a]$.

Покажем, что в равном нулю определителе, т. е. $\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n+1}x_ix_j-p=0$, все миноры по первым n столбцам отличны от нуля и одного знака.

Для упрощения вычислений положим $n=4$ и пусть равен нулю минор

$D\begin{pmatrix}1, & x^2,x^3 & x^4\\ x_1, & x_2,x_3, & x_4\end{pmatrix}=\prod(1,4)\sum_{i=1}^{4}x_i=0$. Выразим $x_1=-x_2-x_3-x_4$ и

$0=\sum_{i,j=1,i\neq j}^{5}x_ix_j-p=\sum_{I=2}^{5}(-x_2-x_3-x_4)\,x_i+\sum_{i,j=2,i\neq j}^{5}x_ix_j-p=-\sum_{i,j=2}^{5}x_2x_j-p<$

$<\ 0$, так как квадратичная форма положительна.

Получили противоречие. Чтобы доказать равенство знаков миноров, допустим $\sum_{i=1}^{n}x_i<0,\sum_{i=2}^{n+1}x_i>0$. Из этих неравенств и упорядоченности точек x_i следует $x_1<0,x_{n+1}>0$,

$0>\sum_{i=1}^{n}x_i\ \sum_{i=2}^{n+1}x_i\ =\sum_{i=2}^{n}x_i^2\ +2\sum_{i,j=2,i\neq j}^{n}x_ix_j+x_1\ \sum_{i=2}^{n+1}x_i+x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i=$

$=\sum_{i=2}^{n}x_i^2\ +2\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n+1}x_ix_j-x_1\sum_{i=2}^{n+1}x_i-x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=2}^{n}x_i^2\ +2p-x_1\sum_{i=2}^{n+1}x_i-$

$-\,x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i>0.$ Получили противоречие.

11. Система типа $\sigma\ (1\leq\sigma\leq n)$.

На сегменте $[-\mathrm{a},b]$ $(\mathrm{a}>0)$ определим непрерывные функции:

$u_1(x)=1,u_2(x)=x,\dots,u_\sigma(x)=x^{\sigma-1},u_{k+1}(x)=\begin{bmatrix}0\,,x\in[-a,a]\\ x^k-a^k,x\in[a,b]\end{bmatrix}$ $\mathrm{k}=\sigma,\dots,n+1.$

При $-a\leq x_1<x_2<\cdots\leq x_{n+1}\leq a$ в определителе

$$\begin{vmatrix}1\ x_1\dots & x_1^{\sigma-1}\ 0\dots & 0\\ \dots\dots. & \dots\dots. & \dots\\ 1\ x_{n+1}\dots & x_{n+1}^{\sigma-1}\ 0\dots. & 0\end{vmatrix}=0$$

все миноры $\sigma+1$ порядка равны нулю, а в миноре, расположенном по первым $\sigma+1$ столбцам и строкам, все дополнительные миноры нулевого столбца одного знака. При $a<x_1<x_2<\cdots\leq x_{n+1}\leq b$ определитель

$$\begin{vmatrix}1\ x_1\dots & x_1^{\sigma-1}\ x_1^{\sigma}\dots & x_1^{n+1}\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\\ 1\ x_{n+1}\dots & x_{n+1}^{\sigma-1}\ x_{n+1}^{\sigma}\dots & x_{n+1}^{n+1}\end{vmatrix}\neq 0,$$

так как это система Чебышева. При $-\mathrm{a}<x_1<\cdots x_\sigma\leq\mathrm{a}<\cdots\leq x_{n+1}\leq b$ наш определитель равен произведению определителей

$$\begin{vmatrix}1 & x_1\dots & x_1^{\sigma-1}\\ \dots & \dots & ,,,\\ 1 & x_\sigma\dots & x_\sigma^{\sigma-1}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_{\sigma+1}^{\sigma} & \dots & x_{\sigma+1}^{n+1}\\ \dots & \dots & \dots\\ x_{n+1}^{\sigma} & \dots & x_{n+!}^{n+1}\end{vmatrix}\neq 0,$$

так как функции 1, x, …, $\mathrm{x}^{\sigma-1}$образуют систему Чебышева на любом промежутке, а функции x^{σ}, …, $\mathrm{x}^{\mathrm{n}+1}$ образуют систему Чебышева на $[a,b]0<a<b.$ При других расположениях точек получится сумма неравных нулю определителей.

12. Функции $x-1$, $\mathrm{x}^2,\dots,\mathrm{x}^{\mathrm{n}}$ образуют систему типа n–1 на $[-1,1]$ [2].

Теорема. Любая линейно независимая система непрерывных на $[a,b]$ функций $\{u_k(x)\}_{k=0}^{n}$ будет определенного типа $\sigma\ (0\leq\sigma\leq n+1)$.

Доказательство. Тип системы Чебышева, когда $D\begin{pmatrix}u_0 & \dots & u_n\\ x_1 & \dots & x_{n+1}\end{pmatrix}\neq 0$ для любых различных точек нашего сегмента равен $n+1$.

Рассмотрим всевозможные совокупности точек $\left\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n+1}^{(k)}\right\}$, для которых определитель равен нулю. Обозначим через $i_k + 1$ минимальное количество строк, по которым все миноры $i_k + 1$ порядка равны нулю.

Положим $\mu_1 = \min(i_k)$ по $\left\{x_j^{(k)}\right\}_{j=1}^{n+1}$. Далее пусть в ряду $D_1^{i_k}, D_2^{i_k}, \dots, D_{i_{k+1}}^{i_k}$ для соответствующей системы точек имеется $i_k - p_k$ перемен знака.

Положим $\mu_2 = \min(\mathrm{p}_k)$ по $\left\{x_j^{(k)}\right\}_{j=1}^{n+1}$. Тип системы $\sigma = min\{\mu_{1,} \mu_2\}$.

Литература

1. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1974.

2. *Алиев М.С.* Свойства полиномов по одной системе функций // Вестник ДГУ. – 2016. – Вып. 2. – С. 41–45.

3. *Алиев М.С.* О наилучшем приближении в пространстве $S_{[a,b]}$.// Вестник ДГУ. – 2018. – Вып. 2.

4. *Алиев М.С.* О приближение функций слабой системой Чебышева // Вестник ДГУ. – 2011. – Вып. 6. – С. 120–123.

5. *Алиев М.С.* Об определителях Вандермонда с двумя вычеркнутыми степенями // Вестник ДГУ. – 2017. – Т. 32, вып. 3. – С. 67–73.

6. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* Оценка наилучших приближений ограниченных функций со знакочувствительным весом // Вестник ДГУ. – 2015. – Вып. 6.

7. *Алиев М.С.* К вопросу реализации нормы одного функционала // Вестник ДГУ. – 2013. – Вып. 1.

8. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* Оценка скорости сходимости сплайнов по рациональным интерполянтам через индуцированные функции // Вестник ДГУ. – 2016. – Вып. 2. – С. 35–40.

9. *Сеге Г., Полиа Г.* Задачи и теоремы из анализа. – М.: Наука, 1978.

10. *Загиров Н.Ш., Пашаева З.Ш.* Оценка значений многочленов внутри отрезка // Вестник ДГУ. – 2012. – Вып. 6.

Поступила в редакцию 20 февраля 2020 г.

UDC 517.512

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-2-53–56

On a Classification of Linearly in Dependent Systems of Functions

M.S. Aliyev

Dagestan State University; Russia, Republic of Dagestan, 367000, Makhachkala, 43a, M. Gadzhiev st. 43a; aliev.mingazhudin@yandex.ru

The paper defines the type of system of continuous and linearly independent functions on [a, b]. Examples of different types of systems are given. The theorem is proved: each system of $n + 1$ continuous, linearly independent functions on [a, b] will be of a certain type $0 \leq \sigma \leq n + 1$.

Keywords: *function, determinant, minor, type of system*.

Received 20 February 2020