УДК 517.51

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-2-43–52

А.-Р.К. Рамазанов[1,2], В.Г. Магомедова[1]

Рациональные сплайн-функции двух переменных

[1]Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а;

[2]Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45; ar-ramazanov@rambler.ru

Рассмотрены вопросы интерполяции функций многих переменных посредством рациональных сплайн-функций.

Для функции двух переменных $f(x,y)$, заданной на произвольной прямоугольной сетке узлов $\Delta_{N,M} = \{(x_i, y_j)| \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b, \ c = y_0 < y_1 < \ldots < y_M = d\}$, из некоторого прямоугольника $\Omega = [a, b]\times[c, d]$ построена сплайн-функция $R_{N,M,1}(x, y, f)$ на базе трехточечных рациональных интерполянтов, которая интерполирует функцию $f(x, y)$ в узлах сетки $\Delta_{N,M}$.

Построенная интерполяционная рациональная сплайн-функция $R_{N,M,1}(x, y, f)$ двух переменных x и y является непрерывно дифференцируемой на прямоугольнике Ω.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна на данном прямоугольнике Ω, то для любой системы прямоугольных сеток узлов $\Delta_{N,M}$, диаметры которых стремятся к нулю с ростом M и N, соответствующая последовательность рациональных сплайн-функций $R_{N,M,1}(x, y, f)$ сходится к самой функции $f(x, y)$ равномерно на прямоугольнике Ω.

Получена оценка скорости равномерной сходимости сплайн-функций $R_{N,M,1}(x, y, f)$ к функции $f(x, y)$ через ее модуль непрерывности на прямоугольнике Ω.

Ключевые слова: *рациональные сплайн-функции, интерполяционные сплайны, сплайны двух переменных*.

Введение

Речь идет о восстановлении функции $f(x, y)$ двух переменных по заданным ее значениям в дискретных точках некоторой плоской области Ω с помощью интерполяции посредством некоторой простой по структуре гладкой функции, а также об оценке возможной при этом погрешности аппроксимации в том случае, когда известны определенные структурные свойства функции $f(x, y)$ во всей области Ω.

Хорошо известно [1–4], что в случае функций одной переменной в качестве интерполянтов можно брать полиномы или различные сплайн-функции, которые однозначно определяются заданной таблицей дискретных значений функции, когда число узлов интерполяции совпадает с числом неопределенных коэффициентов интерполянта. В случае же функций многих переменных возникают определенные проблемы даже в вопросах существования интерполяционных полиномов или сплайн-функций.

Существование полиномиальных сплайн-функций одного вида, интерполирующих данную функцию $f(x, y)$ на прямоугольной сетке узлов, было доказано де Бором [5].

Вопросы дальнейшего развития теории интерполирования посредством полиномиальных сплайн-функций многих переменных можно найти, напр., в [2–7] и цитированных в них источниках. В частности, доказано, что даже в случае непрерывных на отрезке функций одной переменной интерполяционные процессы посредством полиномиальных сплайнов на произвольных сетках узлов могут расходиться.

В случае функций одной переменной рассматривались также вопросы интерполяции посредством рациональных сплайн-функций различных видов [8–13]. В работах [10–11] доказано, что для любой непрерывной на данном отрезке функции одной переменной интерполяционный процесс посредством сплайн-функций по трехточечным рациональным интерполянтам в случае произвольных сеток узлов со стремящимися к нулю диаметрами равномерно сходится.

Ниже вопрос интерполирования посредством рациональных сплайн-функций рассматривается в случае функций многих переменных.

В § 1 доказано, что в случае функции $f(x,y)$, заданной на произвольной прямоугольной сетке узлов из данного прямоугольника Ω, существует гладкая на этом прямоугольнике рациональная сплайн-функция, интерполирующая функцию $f(x,y)$ на такой сетке узлов.

В § 2 получена оценка аппроксимации непрерывной на прямоугольнике Ω функции $f(x,y)$ посредством интерполяционных рациональных сплайн-функций, построенных в § 1. Из этой оценки, в частности, вытекает, что для произвольной непрерывной на прямоугольнике Ω функции $f(x,y)$ последовательность таких сплайн-функций в случае произвольных прямоугольных сеток узлов со стремящимися к нулю диаметрами сходится к функции $f(x,y)$ равномерно на этом прямоугольнике.

§ 1. Построение рациональных сплайн-функций двух переменных

Пусть на прямоугольнике $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ выбрана произвольная прямоугольная сетка узлов с координатами $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ $(N \geq 2)$, $c = y_0 < y_1 < ... < y_M = d$ $(M \geq 2)$.

По этим координатам и произвольным параметрам $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ выберем два набора полюсов $U = \{u_1, u_2, ..., u_{N-1}\}$ и $V = \{v_1, v_2, ..., v_{M-1}\}$, таких, что для $i = 1,2,..., N-1$ и $j = 1,2,..., M-1$ соответственно имеем

$$u_i = \begin{cases} x_{i+1} + \lambda(x_{i+1} - x_i) \text{ при } x_{i+1} - x_i \leq x_i - x_{i-1}, \\ x_{i-1} - \lambda(x_i - x_{i-1}) \text{ при } x_{i+1} - x_i > x_i - x_{i-1}, \end{cases}$$

$$v_j = \begin{cases} y_{j+1} + \mu(y_{j+1} - y_j) \text{ при } y_{j+1} - y_j \leq y_j - y_{j-1}, \\ y_{j-1} - \mu(y_j - y_{j-1}) \text{ при } y_{j+1} - y_j > y_j - y_{j-1}. \end{cases}$$

Будем считать, что данная функция $f(x,y)$ в узлах сетки (x_i, y_j) ($i = 0,1,..., N$; $j = 0,1,..., M$) принимает некоторые конечные значения $f(x_i, y_j)$.

Для построения сплайн-функции применим метод частичных сплайнов (ср., напр., с [2]).

Для этого рассмотрим функции $f_i(y) = f(x_i, y)$ ($i = 0,1,..., N$), каждая из которых определена на сетке $c = y_0 < y_1 < ... < y_M = d$, и по каждой тройке узлов $y_{j-1} < y_j < y_{j+1}$ и полюсу $v_j \notin [y_{j-1}, y_{j+1}]$ ($j = 1,2,..., M-1$) построим рациональную функцию

$$Q_j(y, f_i) = \alpha_j + \beta_j (y - y_j) + \gamma_j \frac{1}{y - v_j}, \tag{1.1}$$

такую, что значения коэффициентов $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ однозначно определяются условиями $Q_j(y_k, f_i) = f_i(y_k) = f(x_i, y_k) \quad (k = j-1, j, j+1)$.

Положим также $Q_0(y, f_i) \equiv Q_1(y, f_i)$ и $Q_M(y, f_i) \equiv Q_{M-1}(y, f_i)$.

Для каждого $i = 0,1,..., N$ на основе рациональных функций (1.1) построим сплайн-функцию $R_{M,1}(y, f_i) = R_{M,1}(y, f_i, [c,d], V)$, такую, что при $y \in [y_{j-1}, y_j]$ ($j = 1,2,..., M$) выполняется равенство

$$R_{M,1}(y, f_i) = \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} Q_j(y, f_i) + \frac{y_j - y}{y_j - y_{j-1}} Q_{j-1}(y, f_i). \tag{1.2}$$

По аналогии с [10] доказываем, что $R_{M,1}(y, f_i)$ ($i = 0,1,..., N$) является непрерывно дифференцируемой функцией на отрезке $[c, d]$.

Фиксируем теперь любое $y \in [c,d]$ и по значениям $R_{M,1}(y, f_i)$ ($i = 0,1,..., N$), используя тройки узлов $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ и полюсы $u_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ ($i = 1,2,..., N-1$), построим интерполянты вида

$$P_i(x,y) = \alpha_i(y) + \beta_i(y)(x - x_i) + \gamma_i(y)\frac{1}{x - u_i}, \tag{1.3}$$

такие, что

$$P_i(x_m, y) = R_{M,1}(y, f_m) \quad (m = i-1, i, i+1). \tag{1.4}$$

Будем считать также, что $P_0(x, y) \equiv P_1(x, y)$ и $P_N(x, y) \equiv P_{N-1}(x, y)$.

Из (1.3) и (1.4) находим, что для любого $y \in [c,d]$ при $i = 1,2,..., N-1$ для коэффициентов рационального относительно x интерполянта $P_i(x, y)$ выполняются равенства

$$\alpha_i(y) = R_{M,1}(y, f_i)\left[1 - \frac{(x_{i-1} - u_i)(x_{i+1} - u_i)}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})}\right] -$$

$$- R_{M,1}(y, f_{i-1})\frac{(x_{i-1} - u_i)(x_{i+1} - u_i)}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} - R_{M,1}(y, f_{i+1})\frac{(x_{i-1} - u_i)(x_{i+1} - u_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)},$$

$$\beta_i(y) = R_{M,1}(y, f_{i-1})\frac{x_{i-1} - u_i}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} +$$

$$+ R_{M,1}(y, f_i)\frac{x_i - u_i}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} + R_{M,1}(y, f_{i+1})\frac{x_{i+1} - u_i}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)},$$

$$\gamma_i(y) = \left[\frac{R_{M,1}(y, f_{i-1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + \frac{R_{M,1}(y, f_i)}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} + \right.$$

$$\left. + \frac{R_{M,1}(y, f_{i+1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}\right](x_{i-1} - u_i)(x_i - u_i)(x_{i+1} - u_i).$$

После того как интерполянты $P_i(x,y)$ $(i=0,1,...,N)$ найдены, на прямоугольнике $\Omega=[a,b]\times[c,d]$ определим сплайн-функцию двух переменных $R_{N,M,1}(x,y)=R_{N,M,1}(x,y,f,\Omega,U,V)$, такую, что для каждого $i=1,2,...,N$ при $(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[c,d]$ выполняется равенство

$$R_{N,M,1}(x,y)=\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}P_i(x,y)+\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}P_{i-1}(x,y). \tag{1.5}$$

Ясно, что на каждом частичном прямоугольнике $\Omega_{i,j}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ $(i=1,2,...,N;j=1,2,...,M)$ функция $R_{N,M,1}(x,y)$ представляет собой рациональную функцию переменных x и y.

Покажем, что сплайн-функция $R_{N,M,1}(x,y)$ имеет непрерывные частные производные на прямоугольнике $\Omega=[a,b]\times[c,d]$.

Существование непрерывных частных производных первого порядка от функции $R_{N,M,1}(x,y)$ во внутренних точках прямоугольников вида $[x_{i-1},x_i]\times[c,d]$ $(i=1,2,...,N)$ непосредственно вытекает из (1.5) и из приведенных выше явных выражений коэффициентов $\alpha_i(y)$, $\beta_i(y)$ и $\gamma_i(y)$ рационального относительно переменной x интерполянта $P_i(x,y)$, в которых $R_{M,1}(y,f_k)$ $(k=i-1,i,i+1)$ представляют собой непрерывно дифференцируемые на отрезке $[c,d]$ функции. Поэтому рассмотрим точки отрезков вида $\{(x_i,y)|c\le y\le d\}$.

В принятых выше обозначениях для краткости положим

$$\delta=\min\{|u_i-x_{i-1}|,|u_i-x_{i+1}|:i=1,2,...,N-1\}$$

и заметим, что функция, определяемая равенством

$$A_i(x,y)=\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}P_i(x,y)+\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}P_{i-1}(x,y), \tag{1.6}$$

правая часть которого совпадает с правой частью равенства (1.5), фактически имеет непрерывные частные производные первого порядка во всех точках множества $F_i=(x_{i-1}-\delta,x_i+\delta)\times[c,d]$ $(i=1,2,...,N)$.

С использованием равенства (1.6) для значений i и $i+1$ легко найти выражения частных производных от функции $A_i(x,y)$ при $(x,y)\in F_i$ и от функции $A_{i+1}(x,y)$ при $(x,y)\in F_{i+1}$, из которых для $y\in[c,d]$ получим равенства

$$\frac{\partial A_i(x_i,y)}{\partial x}=\frac{\partial P_i(x_i,y)}{\partial x}=\frac{\partial A_{i+1}(x_i,y)}{\partial x},\quad \frac{\partial A_i(x_i,y)}{\partial y}=\frac{\partial P_i(x_i,y)}{\partial y}=\frac{\partial A_{i+1}(x_i,y)}{\partial y}. \tag{1.7}$$

При этом отрезок $\{(x_i,y)|c\le y\le d\}$ включается в пересечение $F_i\cap F_{i+1}$, сплайн-функция $R_{N,M,1}(x,y)$ совпадает с функцией $A_i(x,y)$ на множестве $[x_{i-1},x_i]\times[c,d]$ и с функцией $A_{i+1}(x,y)$ на множестве $[x_i,x_{i+1}]\times[c,d]$. Отсюда и из равенств (1.7) имеем, что при $y\in[c,d]$ выполняются равенства

$$\frac{\partial R_{N,M,1}(x_i,y)}{\partial x}=\frac{\partial P_i(x_i,y)}{\partial x},\quad \frac{\partial R_{N,M,1}(x_i,y)}{\partial y}=\frac{\partial P_i(x_i,y)}{\partial y}. \tag{1.8}$$

Используя равенства (1.7), (1.8) и непрерывность частных производных от функций $A_i(x,y)$ и $A_{i+1}(x,y)$ на множестве $F_i \cap F_{i+1}$, получим непрерывность частных производных от сплайн-функции $R_{N,M,1}(x,y)$ в точках отрезков вида $\{(x_i,y) | c \le y \le d\}$.

Следовательно, с учетом $P_0(x,y) \equiv P_1(x,y)$ и $P_N(x,y) \equiv P_{N-1}(x,y)$ получим, что сплайн-функция $R_{N,M,1}(x,y)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка на прямоугольнике $\Omega = [a,b] \times [c,d]$.

§ 2. Аппроксимационные свойства рациональных сплайн-функций двух переменных

Рассмотрим вопрос оценки скорости сходимости в равномерной метрике сплайн-функций $R_{N,M,1}(x,y) = R_{N,M,1}(x,y,f,\Omega,U,V)$ в случае непрерывных на данном прямоугольнике $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ функций $f(x,y)$.

Оценку получим через обычный равномерный модуль непрерывности, который определяется равенством

$$\omega(\delta_1,\delta_2,f) = \sup\{|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| : |x_1 - x_2| \le \delta_1, |y_1 - y_2| \le \delta_2; (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \Omega\}.$$

Пусть, как и выше, сплайн-функция $R_{N,M,1}(x,y) = R_{N,M,1}(x,y,f,\Omega,U,V)$ определена через значения функции $f(x_i,y_j)$ в узлах прямоугольной сетки $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ $(N \ge 2)$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_M = d$ $(M \ge 2)$ и наборы полюсов $U = \{u_1,u_2,\ldots,u_{N-1}\}$ и $V = \{v_1,v_2,\ldots,v_{M-1}\}$ выбраны для произвольных параметров $\lambda > 0$ и $\mu > 0$.

В этих обозначениях имеет место

Теорема. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Omega = [a,b] \times [c,d]$, то при всех $(x,y) \in \Omega$ выполняется неравенство

$$|R_{N,M,1}(x,y) - f(x,y)| \le 2(1 + \max\{1,\mu\})(1 + 4\max\{1,\lambda\})\omega(h_1,h_2,f),$$

где $h_1 = \max\{x_i - x_{i-1} | i = 1,2,\ldots,N\}$, $h_2 = \max\{y_j - y_{j-1} | j = 1,2,\ldots,M\}$.

Доказательство. Действительно, если точка $(x,y) \in \Omega$, то эта точка $(x,y) \in \Omega_{i,j} = [x_{i-1},x_i] \times [y_{j-1},y_j]$ при некоторых $i = 1,2,\ldots,N$ и $j = 1,2,\ldots,M$. Поэтому из (1.5) получим

$$R_{N,M,1}(x,y) - f(x,y) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}[P_i(x,y) - f(x,y)] + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}[P_{i-1}(x,y) - f(x,y)]. \tag{2.1}$$

Чтобы оценить здесь правую часть равенства, предварительно выразим $P_i(x,y)$ в явном виде через значения функции $f(x,y)$ в узлах сетки.

Для этого заметим, что если некоторая функция $F(t)$ конечна в точках $t_0 < t_1 < t_2$ и точка $\tau \notin [t_0,t_2]$, то для коэффициентов рациональной функции вида

$$R(t,F) = \alpha + \beta(t - t_1) + \frac{\gamma}{t - \tau} \tag{2.2}$$

при условии $R(t_i,F) = F(t_i)$ $(i = 0,1,2)$ с использованием разделенных разностей первого порядка $F(t_0;t_1)$ и второго порядка $F(t_0;t_1;t_2)$ получим равенства

$$\alpha = F(t_1) - F(t_0;t_1;t_2)(t_0-\tau)(t_2-\tau), \quad \beta = F(t_0;t_2) + F(t_0;t_1;t_2)(t_1-\tau),$$
$$\gamma = F(t_0;t_1;t_2)(t_0-\tau)(t_1-\tau)(t_2-\tau). \tag{2.3}$$

Эту рациональную функцию можно представить также в виде

$$R(t,F) = A + B(t-t_1) + C\frac{t-t_1}{t-\tau}, \tag{2.4}$$

в котором для коэффициентов A и C получим равенства $A = F(t_1)$, $C = -F(t_0;t_1;t_2)(t_0-\tau)(t_2-\tau)$, а коэффициент B можно представить двояко:

$$B = F(t_0;t_1) + F(t_0;t_1;t_2)(t_2-\tau), \tag{2.5}$$

$$B = F(t_1;t_2) + F(t_0;t_1;t_2)(t_0-\tau). \tag{2.6}$$

Ниже для установления скорости сходимости $R_{N,M,1}(x,y)$ будут использоваться оба представления. А именно, если для узлов $t_0 < t_1 < t_2$ выполняется неравенство вида $t_2 - t_1 \le t_1 - t_0$, то при произвольном $\lambda > 0$ в качестве полюса соответствующей рациональной функции $R(t,F)$ берем $\tau = t_2 + \lambda(t_2 - t_1)$ и в равенстве (2.4) выражение для коэффициента B берем из равенства (2.5); если же для узлов выполняется неравенство вида $t_1 - t_0 < t_2 - t_1$, то в качестве полюса $R(t,F)$ берем $\tau = t_0 - \lambda(t_1 - t_0)$ и в равенстве (2.4) выражение для B берем из (2.6).

Всюду ниже для сокращения записи приняты также обозначения:

$$\varphi(t,\tau,t_0,t_1,t_2) = \frac{t-t_1}{t_0-t_1}\left(1 - \frac{(t-t_0)(t_2-\tau)}{(t-\tau)(t_2-t_0)}\right),$$

$$\psi(t,\tau,t_0,t_1,t_2) = \frac{(t-t_1)(t-t_0)(t_2-\tau)}{(t_2-t_1)(t-\tau)(t_2-t_0)}.$$

Тогда справедливы следующие леммы.

Лемма 2.1. В зависимости от выбора полюса τ в точке $t_2 + \lambda(t_2 - t_1)$ или в точке $t_0 - \lambda(t_1 - t_0)$ рациональная функция $R(t,F)$ имеет соответственно два следующих представления:

$$R(t,F) = F(t_1) + [F(t_0) - F(t_1)]\varphi(t,\tau,t_0,t_1,t_2) + [F(t_2) - F(t_1)]\psi(t,\tau,t_0,t_1,t_2), \tag{2.7}$$

$$R(t,F) = F(t_1) + [F(t_2) - F(t_1)]\varphi(t,\tau,t_2,t_1,t_0) + [F(t_0) - F(t_1)]\psi(t,\tau,t_2,t_1,t_0). \tag{2.8}$$

Доказательство леммы 2.1. Равенства (2.7) и (2.8) непосредственно следуют из равенства (2.4), если в выражениях коэффициентов A, B, C разделенные разности $F(t_0;t_1)$, $F(t_1;t_2)$ и $F(t_0;t_1;t_2)$ выразить через значения функции $F(t_0)$, $F(t_1)$, $F(t_2)$, при этом для коэффициента B берем представление (2.5) или представление (2.6), чтобы получить соответственно (2.7) или (2.8).

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. Если для некоторого $\lambda > 0$ значение $\tau = t_2 + \lambda(t_2 - t_1)$ при $t_2 - t_1 \le t_1 - t_0$ и $\tau = t_0 - \lambda(t_1 - t_0)$ при $t_1 - t_0 < t_2 - t_1$, то при всех $t \in [t_0, t_2]$ каждое из следующих четырех значений $|\varphi(t,\tau,t_0,t_1,t_2)|$, $|\psi(t,\tau,t_0,t_1,t_2)|$, $|\varphi(t,\tau,t_2,t_1,t_0)|$, $|\psi(t,\tau,t_2,t_1,t_0)|$ не превосходит значения $\max\{1,\lambda\}$.

Доказательство леммы 2.2. Действительно, в случае $t_2 - t_1 \le t_1 - t_0$ ($\tau = t_2 + \lambda(t_2 - t_1)$) имеем

$$|\varphi(t,\tau,t_0,t_1,t_2)| = \frac{|t-t_1|}{t_1-t_0}\left(1-\frac{\tau-t_2}{\tau-t}\cdot\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right) \le 1 \quad (t\in[t_0,t_2]),$$

$$|\psi(t,\tau,t_0,t_1,t_2)| = \frac{\tau-t_2}{t_2-t_1}\cdot\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\cdot\frac{t_1-t}{\tau-t} \le \lambda \quad (t\in[t_0,t_1]),$$

$$|\psi(t,\tau,t_0,t_1,t_2)| = \frac{\tau-t_2}{\tau-t}\cdot\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\cdot\frac{t-t_0}{t_2-t_0} \le 1 \quad (t\in[t_1,t_2]).$$

В случае $t_1 - t_0 < t_2 - t_1$ ($\tau = t_0 - \lambda(t_1 - t_0)$) аналогично получим

$|\varphi(t,\tau,t_2,t_1,t_0)| \le 1$ $(t\in[t_0,t_2])$, $|\psi(t,\tau,t_2,t_1,t_0)| \le 1$ $(t\in[t_0,t_1])$, $|\psi(t,\tau,t_2,t_1,t_0)| \le \lambda$ $(t\in[t_1,t_2])$.

Лемма 2.2 доказана.

Чтобы применить теперь эти леммы к функции $P_i(x,y)$ ($i = 1,2,..., N-1$) из (1.3), заметим, что роль точек t_0,t_1,t_2 играют точки x_{i-1},x_i,x_{i+1}, роль τ играет u_i, роль t играет x, а в роли значений $F(t_0), F(t_1), F(t_2)$ выступают соответственно значения $P_{M,1}(y,f_{i-1})$, $P_{M,1}(y,f_i)$, $P_{M,1}(y,f_{i+1})$.

Поэтому отсюда и из равенств (2.7) и (2.8) при $x_{i+1}-x_i \le x_i - x_{i-1}$ ($u_i = x_{i+1} + \lambda(x_{i+1}-x_i)$) и при $x_i - x_{i-1} < x_{i+1} - x_i$ ($u_i = x_{i-1} - \lambda(x_i - x_{i-1})$) соответственно имеем

$$P_i(x,y) = R_{M,1}(y,f_i) + [R_{M,1}(y,f_{i-1}) - R_{M,1}(y,f_i)]\varphi(x,u_i,x_{i-1},x_i,x_{i+1}) + \\ + [R_{M,1}(y,f_{i+1}) - R_{M,1}(y,f_i)]\psi(x,u_i,x_{i-1},x_i,x_{i+1}), \tag{2.9}$$

$$P_i(x,y) = R_{M,1}(y,f_i) + [R_{M,1}(y,f_{i+1}) - R_{M,1}(y,f_i)]\varphi(x,u_i,x_{i+1},x_i,x_{i-1}) + \\ + [R_{M,1}(y,f_{i-1}) - R_{M,1}(y,f_i)]\psi(x,u_i,x_{i+1},x_i,x_{i-1}). \tag{2.10}$$

Чтобы преобразовать $P_{M,1}(y,f_m)$ ($m = i-1, i, i+1$), применим равенство (1.2), в котором к рациональным функциям $Q_j(y,f_m)$ ($j = 1,2,..., M-1$) из равенства (1.1) также можно применить равенства (2.7) и (2.8).

При этом в роли t_0,t_1,t_2 выступают y_{j-1},y_j,y_{j+1}; заменим также τ на v_j и t на y, а вместо значений $F(t_0), F(t_1), F(t_2)$ возьмем соответственно значения $f(x_m,y_{j-1})$, $f(x_m,y_j)$, $f(x_m,y_{j+1})$.

Тогда при $y_{j+1} - y_j \le y_j - y_{j-1}$ ($v_j = y_{j+1} + \mu(y_{j+1} - y_j)$) и при $y_j - y_{j-1} < y_{j+1} - y_j$ ($v_j = y_{j-1} - \mu(y_j - y_{j-1})$) соответственно получим

$$Q_j(y,f_m) = f(x_m,y_j) + [f(x_m,y_{j-1}) - f(x_m,y_j)]\varphi(y,v_j,y_{j-1},y_j,y_{j+1}) + \\ + [f(x_m,y_{j+1}) - f(x_m,y_j)]\psi(y,v_j,y_{j-1},y_j,y_{j+1}), \tag{2.11}$$

$$Q_j(y,f_m)=f(x_m,y_j)+[f(x_m,y_{j+1})-f(x_m,y_j)]\varphi(y,v_j,y_{j+1},y_j,y_{j-1})+$$
$$+[f(x_m,y_{j-1})-f(x_m,y_j)]\psi(y,v_j,y_{j+1},y_j,y_{j-1}). \qquad (2.12)$$

Тогда при $(x,y)\in\Omega_{i,j}$ ($i=1,2,...,N$; $j=1,2,...,M$) из (2.1) имеем

$$\left|R_{N,M,1}(x,y)-f(x,y)\right|\le\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\left|P_i(x,y)-f(x,y)\right|+\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}\left|P_{i-1}(x,y)-f(x,y)\right|\le$$
$$\le\max\left\{\left|P_\nu(x,y)-f(x,y)\right|:\nu=i-1,i\right\}; \qquad (2.13)$$

при $i=1$ в правой части ν принимает одно значение i.

При этом из (2.9) и (2.10) соответственно получим

$$\left|P_\nu(x,y)-f(x,y)\right|\le\left|R_{M,1}(y,f_\nu)-f(x,y)\right|+$$
$$+\left|[P_{M,1}(y,f_{\nu-1})-f(x_\nu,y)+f(x_\nu,y)-R_{M,1}(y,f_\nu)]\right|\cdot\left|\varphi(x,u_\nu,x_{\nu-1},x_\nu,x_{\nu+1})\right|+$$
$$+\left|[P_{M,1}(y,f_{\nu+1})-f(x_\nu,y)+f(x_\nu,y)-R_{M,1}(y,f_\nu)]\right|\cdot\left|\psi(x,u_\nu,x_{\nu-1},x_\nu,x_{\nu+1})\right|$$

(здесь $\nu=i$, если $i=1$, $\nu=i-1$, если $i=N$, и ν принимает два значения $i-1$ и i, если $2\le i\le N-1$),

$$\left|P_\nu(x,y)-f(x,y)\right|\le\left|R_{M,1}(y,f_\nu)-f(x,y)\right|+$$
$$+\left|[P_{M,1}(y,f_{\nu+1})-f(x_\nu,y)+f(x_\nu,y)-R_{M,1}(y,f_\nu)]\right|\cdot\left|\varphi(x,u_\nu,x_{\nu+1},x_\nu,x_{\nu-1})\right|+$$
$$+\left|[P_{M,1}(y,f_{\nu-1})-f(x_\nu,y)+f(x_\nu,y)-R_{M,1}(y,f_\nu)]\right|\cdot\left|\psi(x,u_\nu,x_{\nu+1},x_\nu,x_{\nu-1})\right|.$$

Из (1.2) при $i=0,1,...,N$ и $y\in[y_{j-1},y_j]$ ($j=1,2,...,M$) имеем

$$\left|R_{M,1}(y,f_i)-f(x,y)\right|\le\frac{y-y_{j-1}}{y_j-y_{j-1}}\left|Q_j(y,f_i)-f(x,y)\right|+\frac{y_j-y}{y_j-y_{j-1}}\left|Q_{j-1}(y,f_i)-f(x,y)\right|\le$$
$$\le\max\left\{\left|Q_j(y,f_i)-f(x,y)\right|,\left|Q_{j-1}(y,f_i)-f(x,y)\right|\right\},\text{ если } 2\le j\le M-1;$$

здесь под знаком $\max$ берем лишь одно $\left|Q_1(y,f_i)-f(x,y)\right|$, если $j=1$, и лишь одно $\left|Q_{M-1}(y,f_i)-f(x,y)\right|$, если $j=M$.

При этом из (2.11) и (2.12) для $(x,y)\in\Omega_{i,j}$ при $m=i-1,i,i+1$ соответственно получим

$$\left|Q_j(y,f_m)-f(x,y)\right|\le\left|f(x_m,y_j)-f(x,y)\right|+$$
$$+\left|f(x_m,y_{j-1})-f(x_m,y_j)\right|\cdot\left|\varphi(y,v_j,y_{j-1},y_j,y_{j+1})\right|+$$
$$+\left|f(x_m,y_{j+1})-f(x_m,y_j)\right|\cdot\left|\psi(y,v_j,y_{j-1},y_j,y_{j+1})\right|,$$
$$\left|Q_j(y,f_m)-f(x,y)\right|\le\left|f(x_m,y_j)-f(x,y)\right|+$$
$$+\left|f(x_m,y_{j+1})-f(x_m,y_j)\right|\cdot\left|\varphi(y,v_j,y_{j+1},y_j,y_{j-1})\right|+$$
$$+\left|f(x_m,y_{j-1})-f(x_m,y_j)\right|\cdot\left|\psi(y,v_j,y_{j+1},y_j,y_{j-1})\right|.$$

Вполне аналогично можем оценить $Q_{j-1}(y,f_{im})-f(x,y)$ для $(x,y)\in\Omega_{i,j-1}$ при $m=i-1,i,i+1$.

Если теперь для сокращения записи применим обозначения

$$h_1 = \max\left\{x_i - x_{i-1} \middle| i = 1,2,..., N\right\},\ h_2 = \max\left\{y_j - y_{j-1} \middle| j = 1,2,..., M\right\}$$

и воспользуемся леммами 2.1 и 2.2, то для $(x,y)\in\Omega_{i,j}$ при $m = i-1, i, i+1$ получим

$$\max\left\{\left|Q_k(y,f_m) - f(x,y)\right| : k = j-1, j\right\} \le \omega(h_1,h_2,f) + 2\omega(0,h_2,f)\max\{1,\mu\}.$$

Учитывая $Q_0(y,f_m) \equiv Q_1(y,f_m)$ и $Q_M(y,f_m) \equiv Q_{M-1}(y,f_m)$, отсюда при $(x,y)\in\Omega_{i,j}$ $(i = 1,2,..., N-1;\ j = 1,2,..., M-1)$ имеем

$$\left|R_{M,1}(y,f_i) - f(x,y)\right| \le \omega(h_1,h_2,f) + 2\max\{1,\mu\}\omega(0,h_2,f). \qquad (2.16)$$

Ясно, что $\left|R_{M,1}(y,f_i) - f(x,y)\right|$ не превосходит правой части последнего неравенства и для крайних значений $i = 0$ и $i = N$.

Используя неравенства (2.14)–(2.15) и лемму 2.2, легко можно оценить $\left|R_\nu(x,y) - f(x,y)\right|$ $(\nu = i-1, i)$ при $(x,y)\in\Omega_{i,j}$, а затем применить неравенство (2.13). В результате при $(x,y)\in\Omega_{i,j}$ получим

$$\left|R_{N,M,1}(x,y) - f(x,y)\right| \le \left(\omega(2h_1,h_2,f) + 2\max\{1,\mu\}\omega(0,h_2,f)\right)\left(1 + 4\max\{1,\lambda\}\right) \le$$
$$\le 2\left(1 + \max\{1,\mu\}\right)(1 + 4\max\{1,\lambda\})\omega(h_1,h_2,f).$$

Теорема доказана.

Заметим, что в доказанной теореме в качестве значений параметров можем брать значения $\lambda = 1$ и $\mu = 1$. Тогда для произвольной непрерывной на прямоугольнике $\Omega = [a,b]\times[c,d]$ функции $f(x,y)$ при всех $(x,y)\in\Omega$ выполняется неравенство $\left|R_{N,M,1}(x,y) - f(x,y)\right| \le 20\,\omega(h_1,h_2,f)$.

Следовательно, для любой системы прямоугольных сеток узлов

$$\Delta_{N,M} = \left\{(x_i,y_j)\middle|\, a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b, c = y_0 < y_1 < ... < y_M = d\right\},$$

диаметры которых стремятся к нулю с ростом M и N, соответствующая последовательность рациональных сплайн-функций $R_{N,M,1}(x,y,f)$ сходится к самой функции $f(x,y)$ равномерно на прямоугольнике Ω.

Литература

1. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 464 с.
2. *Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 319 с.
3. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
4. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
5. *Carl de Boor*. Bicubic spline interpolation // J. Math. Phis. – 1962. – V. 41. – P. 212–218.
6. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.
7. *Васильев А.А*. Аппроксимация с интерполяцией сплайнами произвольного дефекта // Мат. заметки. – 2018. – Т. 29, вып. 5. – С. 743–748.
8. *Schaback R*. Spezielle rationale Splinefunktionen // J. Approx. Theory. – 1973. – Vol. 7, № 2. – P. 281–292.

9. *Edeoa A., Gofeb G., Tefera T.* Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation // American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences. – 2015. – Vol. 12, № 1. – P. 110–122.

10. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* Безусловно сходящиеся интерполяционные рациональные сплайны // Мат. заметки. – 2018. – Т. 103, вып. 4. – С. 592–603.

11. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* Сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам с автономными полюсами // Дагестанские электронные математические известия. – 2017. – Вып. 7. – С. 16–28.

12. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* О приближенном решении дифференциальных уравнений с помощью рациональных сплайн-функций // Ж-л вычисл. математики и мат. физ. – 2019. – Т. 59, № 4. – С. 579–586.

13. *Рамазанов А.-Р.К., Гусейнов И.Г.* О приближенном решении рациональными сплайн-функциями дифференциальных уравнений с особенностями // Вестник Дагестанского государственного университета. Сер.: Естественные науки. – 2019. – Т. 34, вып. 4. – С. 72–77.

Поступила в редакцию 11 февраля 2020 г.

UDC 517.51

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-2-43–52

Rational Spline-functions of Two Variables

A.-R.K. Ramazanov[1,2], V.G. Magomedova[1]

[1]Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a;
[2]Dagestan Federal Research Center of RAS; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 45;
ar-ramazanov@rambler.ru

The problems of interpolation of many variables functions by means of rational spline functions are studied in the article.

For discrete function of two variables $f(x, y)$ defined on a given rectangular grid $\Delta_{N,M} = \{(x_i, y_j)|\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b,\ c = y_0 < y_1 < \ldots < y_M = d\}$ of some rectangle $\Omega=[a,b]\times[c, d]$ spline-function $R_{N,M,1}(x, y, f)$ has been constructed on the basis of three-point rational interpolants which interpolates function $f(x, y)$ at the nodes of the grid $\Delta_{N,M}$.

For continuous functions of two variables $f(x, y)$ on a given rectangle $\Omega = [a, b]\times[c, d]$ with a rectangular grid we obtain convergence bounds for such rational spline-functions $R_{N,M,1}(x, y, f)$ with respect to the modulus of continuity.

The sequence of such rational spline-functions $R_{N,M,1}(x, y, f)$ for each sequence of grids with a diameter tending to zero uniformly on the rectangle converges to the function $f(x, y)$ itself.

Keywords: *rational spline-functions, interpolation splines, splines of two variables.*

Received 11 February 2020