УДК 517.929.4+519.21

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-2-33–42

Р.И. Кадиев[1,2], З.И. Шахбанова[1]

Устойчивость решений одной гибридной системы Ито с последействием относительно начальных данных

[1] Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; kadiev_r@mail.ru;

[2] Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45

Исследуются вопросы q-устойчивости ($1 \leq q < \infty$) решений одной гибридной системы Ито с последействием относительно начальных данных. Для этого применяются идеи и методы, разработанные Н.В. Азбелевым и его учениками для исследования вопросов устойчивости решений детерминированных функционально-дифференциальных уравнений. Получены достаточные условия q-устойчивости и экспоненциальной q-устойчивости ($2 \leq q < \infty$) решений исследуемой системы в терминах параметров уравнений системы.

Ключевые слова: *устойчивость решений, дифференциальные и разностные уравнения Ито, метод вспомогательных уравнений.*

Введение

В настоящее время все больший интерес у исследователей вызывают процессы, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями Ито и разностными уравнениями Ито с последействием. Отличительной особенностью этих систем является наличие в пространстве состояний двух компонент – дискретной и непрерывной. Примерами таких систем могут служить системы с возможными нарушениями (типа «отказ – восстановление»), многорежимные динамические системы, в которых смена режима определяется характером протекания некоторого внешнего случайного процесса (обнаружение цели), системы массового обслуживания. Так как одним из основных условий физической реализуемости любого процесса является его устойчивость, то изучение упомянутых процессов привело к необходимости создания соответствующего направления в теории устойчивости.

Теоретические основы исследования устойчивости и управления гибридными системами были заложены в работах И.Я. Каца и Н.Н. Красовского [1], Н.Н. Красовского и Е.А. Лидского [2]. К настоящему времени изучению детерминированных гибридных систем посвящено множество работ, из которых, не претендуя на полноту, отметим монографии Казакова И.Е. и Артемьева В.М. [3], Бухалева В.А. [4], Каца И.Я. [5], Mariton M. [6].

Многие реальные процессы в природе и технике имеют последействие, т. е. их поведение определяется состоянием не только в текущий момент, но и в предшествующие. В других случаях характерным является транспортное запаздывание. Примерами могут служить динамические системы, управляемые на значительном расстоянии (робот-луноход), системы с трубопроводами большой длины и т. п.

Типичной гибридной стохастической системой с запаздыванием является динамическая система массового обслуживания, управляемая на расстоянии (энергосистемы, смесительные системы в химической технологии). В этих системах непрерывная компонента вектора состояния описывается дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом, а дискретная компонента, характеризующая режим работы системы, представляет собой марковскую цепь с конечным числом состояний.

Примеры показывают, что поведение решений систем без учета запаздывания, даже при малой его величине, может существенно отличаться от поведения решений тех же систем с запаздывающим аргументом. Это обстоятельство подчеркивает необходимость и принципиальную важность изучения систем с запаздыванием.

Вопросы устойчивости решений стохастических гибридных систем ранее, по-видимому, не рассматривались. В настоящей работе изучаются некоторые вопросы моментной устойчивости решений систем, состоящих из одного линейного дифференциального уравнения Ито с последействием и одного линейного разностного уравнения Ито с запаздыванием по отношению к начальным данным. Исследования проведены методом модельных или вспомогательных уравнений с применением теории положительно обратимых матриц. Получены достаточные условия устойчивости решений для исследуемых систем в терминах параметров уравнений систем. Вопросы устойчивости решений для дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями этим методом изучены в [7], а в случае разностных уравнений Ито с последействием – в [8].

Предварительные сведения и объект исследования

Пусть $(\Omega, \Im, (\Im_t)_{t\geq 0}, P)$ – стохастический базис; k^2 – линейное пространство 2-мерных $\Im_0$-измеримых случайных величин; $B_i, i = 2,...,m$ – скалярные стандартные независимые винеровские процессы; $1 \leq p < \infty$; c_p – положительное число, зависящее от p [9, с. 65]; E – обозначение для математического ожидания; $|.|$ – норма вектора в нормированном пространстве R^2; $\|.\|$-норма $2\times m$-матрицы, согласованная с нормой вектора в R^2; μ – мера Лебега на $[0,\infty)$; N – множество натуральных чисел; $N_+ = \{0\} \cup N$; $\overline{E}$ – единичная матрица размерности 2×2.

Пусть в дальнейшем $\overline{x}(t)$, $(t \geq 0)$ – непрерывные компоненты вектора состояний системы; $\overline{\overline{x}}(s)$, $(s \in N_+)$ – дискретные компоненты вектора состояний системы; $[t]$ – целая часть числа t; $x(t) = \mathrm{col}(\overline{x}(t), \overline{\overline{x}}([t]))$, $(t \geq 0)$ – вектор состояний системы. Заметим, что по дискретной компоненте $\overline{\overline{x}}(s)$, $(s \in N_+)$ вектора состояний системы однозначно определяется $\overline{\overline{x}}([t]))$, $(t \geq 0)$ и наоборот. Поэтому при необходимости вместо $\overline{\overline{x}}(s)$, $(s \in N_+)$ будем пользоваться $\overline{\overline{x}}([t]))$, $(t \geq 0)$.

В данной статье исследуются вопросы моментной устойчивости решений для системы, состоящей из одного линейного дифференциального уравнения Ито с последействием и одного линейного разностного уравнения Ито с запаздыванием вида

$$
\begin{aligned}
&d\bar{x}(t) = -\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)x(h_{1l}(t))dt + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(t)x(h_{ij}(t))dB_i(t) \quad (t \ge 0),\\
&\bar{\bar{x}}(s+1) = \bar{\bar{x}}(s) - \sum_{j=-\infty}^{s}\left[A_1(s,j)x(j)\right]h + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=-\infty}^{s}\left[A_i s, j)x(j)\right]\left(B_i((s+1)h) - B_i(sh)\right) \quad (s \in N_+)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

относительно начальных данных

$$x(j) = \varphi(j) \quad (j < 0), \tag{1a}$$

$$x(0) = b, \tag{1b}$$

где:

1. $x(t) = \mathrm{col}(\bar{x}(t), \bar{\bar{x}}([t]))$, $(t \ge 0)$ – 2-мерный неизвестный случайный процесс;

2. A_{ij} – 1×2-матрица при $i = 1,..., m$, $j = 1,..., m_i$, элементами матриц A_{1j}, $j = 1,..., m_1$ являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых почти наверно (п. н.) локально суммируемы, а элементами матриц A_{ij}, $i = 1,..., m$, $j = 1,..., m_i$ являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, траектории которых п. н. локально суммируемы с квадратом;

3. h_{ij}, $i = 1,..., m$, $j = 1,..., m_i$ – измеримые по Борелю функции, заданные на $[0,\infty)$, такие, что $h_{ij}(t) \le t$ $(t \in [0,\infty))$ μ – почти всюду, $i = 1,..., m$, $j = 1,..., m_i$;

4. h – достаточно малое положительное действительное число;

5. $A_i(s, j)$ – $n\times n$-матрица, у которой элементы $\Im_s$-измеримые скалярные случайные величины при $i = 1,..., m$, $j = -\infty,..., s$, $s \in N_+$;

6. $\varphi(j)(j < 0)$ – 2-мерная $\Im_0$-измеримая случайная величина;

7. $b \in k^2$.

Определение 1. Под решением системы (1), удовлетворяющей условиям (1a), (1b), понимается прогрессивно измеримый случайный процесс $x(t) = \mathrm{col}(\bar{x}(t), \bar{\bar{x}}([t]))$, $(t \ge 0)$ такой, что $x(j) = \varphi(j)$ $(j < 0)$, $x(0) = b$, который удовлетворяет системе (1) P почти всюду.

Пусть в дальнейшем D^2 – линейное пространство 2-мерных прогрессивно измеримых случайных процессов на $[0,\infty)$, траектории которых п. н. непрерывны справа и имеют пределы слева; L^2 – линейное пространство 2-мерных случайных процессов на $(-\infty, 0)$, которые не зависят от винеровских процессов $B_i, i = 2,..., m$, и имеют п. н. ограниченные в существенном траектории; $\gamma : [0,\infty) \to R^1$ – положительная непрерывная функция.

Используя известные результаты, легко убедиться, что при сделанных предположениях задача (1), (1a), (1b) имеет единственное решение. Обозначим это решение через $x(t, b, \varphi)(t \ge 0)$. Очевидно, что \$ $x(., b, \varphi) \in D^2$. Заметим также, что при нулевых начальных условиях (1a), (1b) задачи (1), (1a), (1b) имеют только тривиальное решение.

Введем следующее обозначение линейного подпространства нормированного пространства D^2, k^2, L^2:

$$M_p^{\gamma} = \{x : x \in D^2, \|x\|_{M_p^{\gamma}} \overset{def}{=} \sup_{s\in N_+}\left(E|\gamma(s)x(s)|^p\right)^{1/p} < \infty\}(M_p^1 = M_p);$$

$$k_p^2 = \{\alpha : \alpha \in k^2, \|\alpha\|_{k_p^{2n}} \overset{def}{=} \left(E|\alpha|^p\right)^{1/p} < \infty\}.$$

$$L_p^2 = \{\varphi : \varphi \in L^2, \|x\|_{L_p^{\gamma}} \overset{def}{=} vrai\sup_{j<0}\left(E|\varphi(j))|^p\right)^{1/p} < \infty\}.$$

Определение 2. Систему (1) назовем:

- p *-устойчивой* относительно начальных данных, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых $b \in k_p^n$, $\varphi \in L_p^2$ и $\|b\|_{k_p^2} + \|\varphi\|_{L_p^2} < \delta$ будет выполнено неравенство $(E|x(t,b,\varphi)|^p)^{1/p} \le \varepsilon$ для любого $t \ge 0_+$;

- *асимптотически* p *-устойчивой* относительно начальных данных, если оно p -устойчиво относительно начальных данных, и кроме того для любых $b \in k_p^n$, $\varphi \in L_p^2$ и $\|b\|_{k_p^2} + \|\varphi\|_{L_p^2} < \delta$ будет выполнено соотношение $\lim_{t\to+\infty}(E|x(t,b,\kappa)|^p)^{1/p} = 0$;

- *экспоненциально* p *-устойчивой* относительно начальных данных, если найдутся такие числа $\bar{c} > 0$, $\beta > 0$, что выполнено неравенство $(E|x(t,b,\varphi)|^p)^{1/p} \le \bar{c}(\|b\|_{k_p^2} + \|\varphi\|_{L_p^2})\exp\{-\beta t\}$ ($t \ge 0$).

Определение 3. Систему (1) назовем M_p^{γ}-устойчивой относительно начальных данных (или короче M_p^{γ}-устойчивой), если для любых $b \in k_p^n$, $\varphi \in L_p^2$ для решения задач (1), (1a), (1b) $x(t,b,\varphi)(t \ge 0)$ выполнено соотношение $x(.,b,\kappa) \in M_p^{\gamma}$ и неравенство $\|x(.,b,\varphi)\|_{M_p^{\gamma}} \le c\left(\|b\|_{k_p^{2n}} + \|\varphi\|_{L_p^2}\right)$ для некоторого положительного числа c.

Нетрудно убедиться в том, что:

1) если $\gamma(t) = 1$ ($t \ge 0$) и система (1) M_p^{γ}-устойчива, то она и p -устойчива относительно начальных данных.

2) если $\gamma(t) \ge \delta$ ($t \ge 0$) для некоторого $\delta > 0$, $\lim_{t\to+\infty}\gamma(t) = +\infty$ и система (1) M_p^{γ}-устойчива, то она и асимптотически p -устойчиво относительно начальных данных.

3) если $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$ ($t \ge 0$) для некоторого $\beta > 0$ и система (1) M_p^{γ}-устойчива, то она и экспоненциально p -устойчива относительно начальных данных.

Метод исследования и основной результат

Моментная устойчивость тривиального решения системы (1) по отношению к начальным данных будем исследовать преобразованием исходной системы (1) в другую, более простую систему с помощью вспомогательной (модельной) системы, для которой легко и непосредственно можно проверить условия, обеспечивающие моментную устойчивость тривиального решения системы (1) относительно начальных функций и значений.

Наряду с задачами (1), (1a), (1b) рассмотрим систему линейных обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений вида

$$d\overline{x}(t) = [B(t)\,\overline{x}(t) + f_1(t)]dt \qquad (t \ge 0),$$
$$\overline{\overline{x}}(s+1) = \overline{\overline{x}}(s) + [\sum_{j=0}^{s} B(s,j)\overline{\overline{x}}(j) + f_2(s)]h \qquad (s \in N_+), \tag{2}$$

где $B(t)$ – измеримые по Борелю локально суммируемые функции, $f_1(t)$ – прогрессивно измеримый случайный процесс с п. н. локально суммируемыми траекториями; h – также достаточно малое положительное действительное число; $B(s,j)$ – некоторые действительные числа при $j = 0,...,s$, $s \in N_+$; $f_2(s)$ – некоторая скалярная $\mathfrak{I}_s$-измеримая случайная величина при $s \in N_+$.

Систему (2) называют вспомогательной или модельной системой.

Лемма 1. Для решения системы (2) $x(t) = \mathrm{col}(\overline{x}(t), \overline{\overline{x}}([t]))$, $(t \ge 0)$, проходящее через $x_0 = \mathrm{col}(\overline{x}_0, \overline{\overline{x}}_0)$ имеет место следующее представление

$$\overline{x}(t) = \overline{X}(\mathrm{t})\,\overline{x}_0 + \int_0^t \overline{X}(t)\overline{X}(\tau)^{-1} f_1(\tau)d\tau \qquad (t \ge 0),$$
$$\overline{\overline{x}}(s) = \overline{\overline{X}}(s,0)\overline{\overline{x}}_0 + \sum_{\tau=0}^{s-1} \overline{\overline{X}}(s,\tau) + f_2(\tau)h \qquad (s \in N_+), \tag{3}$$

где $\overline{X}(t)$ решение уравнения $d\overline{x}(t) = B(t)\,\overline{x}(t)dt \quad (t \ge 0)$, причём $\overline{X}(0=1)$, $\overline{\overline{X}}(s,\tau)$ $(s,\tau \in N_+, 0 \le \tau \le s)$ решение уравнения $\overline{\overline{x}}(s+1) = \overline{\overline{x}}(s) + \sum_{j=0}^{s} B(s,j)\overline{\overline{x}}(j)h \quad (s \in N_+)$,

причем $\overline{\overline{X}}(\tau,\tau) = 1 \ (\tau \in N_+)$.

Справедливость леммы следует из известных формул для представлений решений для линейных обыкновенных неоднородных дифференциальных и разностных уравнений.

Используя систему (2) и лемму, задачу (1), (1a), (1b) перепишем в следующем эквивалентном виде:

$$x(t) = X(t)b + (\Theta x)(t) + (C\varphi)(t) \quad (t \ge 0), \tag{4}$$

где $X(t)$ – диагональная 2×2-матрица, у которой на главной диагонали находятся решения $\overline{X}(t)$, $\overline{\overline{X}}(s,0)$,

$$(\Theta x)(t) = \mathrm{col}\left(\int_0^t \overline{X}(t)\overline{X}(s)^{-1}\left[B(s) - \sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(s)\hat{x}(h_{1j}(s))\right]ds + \right.$$
$$+ \int_0^t \overline{X}(t)\overline{X}(s)^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(s)\hat{x}(h_{ij}(s))dB_i(s),$$
$$\left.\sum_{\tau=0}^{[t-1]} \overline{\overline{X}}([t],\tau+1)\left[[B(\tau.j) - \sum_{j=0}^{\tau}[A_1(\tau,j)]x(j)h + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{\tau} A_i s,j)x(j)\int_{\tau h}^{(\tau+1)h} dB_i(\varsigma)\right]\right),$$

$$(C\varphi)(t)=\operatorname{col}\left(\int_0^t \overline{X}(t)\overline{X}(s)^{-1}\left[-\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(s)\hat{\varphi}(h_{1j}(s))\right]ds+\right.$$

$$+\int_0^t \overline{X}(t)\overline{X}(s)^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(s)\hat{\varphi}(h_{ij}(s))dB_i(s),$$

$$\left.\sum_{\tau=0}^{[t-1]}\overline{\overline{X}}([t],\tau+1)\left[[-\sum_{j=-\infty}^{-1}\left[A_1(\tau,j)\right]\varphi(j)h+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=-\infty}^{-1}A_i s,j)\varphi(j)\int_{\tau h}^{(\tau+1)h}dB_i(\varsigma)\right]\right),$$

$\hat{x}(t)$ – неизвестный двумерный случайный процесс на $(-\infty,\infty)$, такой, что $\hat{x}(t)=0$ при $t<0$ и $\hat{\varphi}(t)$ – известный двумерный случайный процесс на $(-\infty,\infty)$, такой, что $\hat{\varphi}(t)=\varphi(t)$ при $t<0$ и $\hat{\varphi}(t)=0$ при $t\ge 0$.

Приведем следующую теорему, в справедливости которой можно убедиться и непосредственно.

Теорема 1. Пусть для некоторой положительной непрерывной функция.

$\gamma:[0,\infty)\to R^1$ и для любых $x\in M_p^\gamma$, $\varphi\in L_p^2$, $b\in k_p^2$ имеем $X(.)b\in M_p^\gamma$, $C\varphi\in M_p^\gamma$

$\| X(.)b\|_{M_p^\gamma}\le c_1\| b\|_{k_p^2}$, $\|\Theta x\|_{m_p^\gamma}\le c_2\| x\|_{k_p^n}$, $\| C\varphi\|_{M_p^\gamma}\le c_3\|\varphi\|_{L_p^2}$, где c_1,c_2,c_3 – некоторые положительные числа и $c_2<1$. Тогда система (1) M_p^γ-устойчива.

Обозначим через $\widetilde{x}^\gamma=\operatorname{col}\left(\sup\limits_{t\ge 0}\left(E\left|\gamma(t)\overline{x}(t)\right|^{2p}\right)^{1/2p},\sup\limits_{st\ge 0}\left(E\left|\gamma(t)\overline{\overline{x}}(t)\right|^{2p}\right)^{1/2p}\right)$,

$\overline{e}=col(1,1)$ – 2-мерный вектор.

Пусть в силу каждого уравнения системы (4) нам удалось получить матричное неравенство вида

$$\overline{E}\widetilde{x}^\gamma\le\overline{C}\widetilde{x}^\gamma+\overline{c}\|b\|_{k_{2p}^2}\overline{e}+\overline{\overline{c}}\|\varphi\|_{L_{2p}^2}\overline{e},\tag{5}$$

где $\overline{C}$ – некоторая 2×2 -матрица, $\overline{c},\overline{\overline{c}}$ – некоторые положительные числа.

Тогда справедлива следующая

Теорема 2. Если для неравенства (5) матрица $\overline{E}-\overline{C}$ является положительно обратимой матрицей, то система (1) M_{2p}^γ-устойчива.

Доказательство. В силу положительной обратимости матрицы $\overline{E}-\overline{C}$ неравенство (5) можно переписать в следующем виде:

$$\widetilde{x}^\gamma\le(\overline{E}-\overline{C})^{-1}(\overline{c}\|b\|_{k_{2p}^2}\overline{e}+\overline{\overline{c}}\|\varphi\|_{L_{2p}^2}\overline{e},).$$

Тогда из предыдущего неравенства получаем

$$\left|\widetilde{x}^\chi\right|\le K\left(\|b\|_{k_{2p}^n}+\|\varphi\|_{l_{2p}}\right),\tag{6}$$

где $K\le\left\|\left(\overline{E}-\overline{C}\right)^{-1}\right\|\left|\overline{e}\right|\max\{\overline{c},\overline{\overline{c}}\}$. Поскольку $x(t,b,\varphi)=x(t)$ и $\|x(.,b,\varphi)\|_{M_{2p}^\gamma}\le\left|\widetilde{x}^\gamma\right|$, то из неравенства (6) следует, что для любых $b\in k_{2p}^2$ и $\varphi\in L_{2p}$ имеем $x(.,b,\varphi)\in M_{2p}^\gamma$ и

$\|x(.,b,\varphi)\|_{M^{\gamma}_{2p}} \le c\left(\|b\|_{k^2_{2p}} + \|\varphi\|_{L^2_{2p}}\right)$, где c – некоторое положительное число. Следовательно, система (1) M^{γ}_{2p}-устойчива.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим частный случай системы (1), систему двух линейных скалярных обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений Ито:

$$\begin{aligned} &d\bar{x}(t) = [-a_{11}\bar{x}(t) + a_{12}\bar{\bar{x}}([t])]dt + [b_{11}\bar{x}(t) + b_{12}\bar{\bar{x}}([t])]dB(t) \quad (t \ge 0), \\ &\bar{\bar{x}}(s+1) = \bar{\bar{x}}(s) + [a_{21}\bar{x}(s) - a_{22}\bar{\bar{x}}(s)]h + [b_{121}\bar{x}(s) + b_{22}\bar{\bar{x}}([s])](B((s+1)h) - B(sh)) \quad (s \in N_+), \end{aligned} \tag{9}$$

где h – достаточно малое положительное действительное число, a_{ij} – некоторые действительные числа при $i, j = 1,2$, $s \in N_+$, B – скалярный стандартный винеровский процесс.

Так как система состоит из линейных скалярных обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений Ито, в начальных данных отсутствует начальная функция.

В качестве модельной системы (2) возьмем систему

$$\begin{aligned} &d\bar{x}(t) = [-a_{11}\bar{x}(t) + f_1)(t)]dt \quad (t \ge 0), \\ &\bar{\bar{x}}(s+1) = \bar{\bar{x}}(s) + [-a_{22}\bar{\bar{x}}(s) + f_2(s)]h \quad (s \in N_+), \end{aligned} \tag{10}$$

где h, a_{11}, a_{22} – те же самые числа, что и в системе (9).

Для системы (10) имеем: $\bar{X}(t) = \exp\{-a_{11}t\}$, $\bar{\bar{X}}(s,\tau) = (1 - a_{22}h)^{s-\tau}$.

Используя систему (10), задачи (9), (1b) можно записать в эквивалентном виде

$$x(t) = X(t)b + (\Theta x)(t) \quad (t \ge 0), \tag{11}$$

где $X(t)$ – диагональная 2×2-матрица, у которой на главной диагонали находятся решения $\bar{X}(t)$, $\bar{\bar{X}}(s,0)$,

$$(\Theta x)(t) = \mathrm{col}\left(\int_0^t \exp\{-a_{11}(t-s)\}a_{12}\bar{\bar{x}}([s])ds + \int_0^t \exp\{-a_{11}(t-s)\}[b_{11}\bar{x}(s) + b_{12}\bar{\bar{x}}([s])]B(s),\right.$$

$$\left.\sum_{\tau=0}^{[t]-1}(1-a_{22}h)^{[t]-\tau+1}\left[[a_{21}h\bar{x}(\tau) + [b_{21}\bar{x}(\tau) + b_{22}\bar{\bar{x}}(\tau)]\int_{\tau h}^{(\tau+1)h} dB_i(\varsigma)\right]\right).$$

В дальнейшем будем пользоваться следующими леммами, доказанными в [7].

Лемма 2. Пусть $f(s)$ – скалярный случайный процесс, интегрируемый по винеровскому процессу $B(s)$ на отрезке $[0,t]$. Тогда справедливо неравенство

$$\left(E\left|\int_0^t f(s)dB(s)\right|^{2p}\right)^{1/(2p)} \le c_p\left(E\left(\int_0^t |f(s)|^2 ds\right)^p\right)^{1/(2p)}. \tag{12}$$

Лемма 3. Пусть $g(s)$ – скалярная функция на $[0,\infty)$, квадрат которой локально суммируем, $f(s)$ – скалярный случайный процесс, такой, что $\sup_{t\ge 0}\left(E|f(t)|^{2p}\right)^{1/(2p)} < \infty$.

Тогда справедливы неравенства

$$\sup_{t\ge 0}\left(E\left|\int_0^t g(s)f(s)dB(s)\right|^{2p}\right)^{1/(2p)} \le \sup_{t\ge 0}\left(\int_0^t |g(s)|ds\right)\sup_{t\ge 0}\left(E|f(t)|^{2p}\right)^{1/(2p)}, \tag{13}$$

$$\sup_{t\ge 0}\left(E\left|\int_0^t (g(s))^2(f(s))^2 ds\right|^{p}\right)^{1/(2p)} \le \sup_{t\ge 0}\left(\int_0^t (g(s))^2 ds\right)^{1/2} \sup_{t\ge 0}\left(E|f(t)|^{2p}\right)^{1/(2p)}. \tag{14}$$

Пусть $a_{11} > 0$, $0 < a_{22}h < 1$, $\gamma(t) = \exp\{\lambda t\}$ $(t \ge 0)$, где $0 < \lambda < \max\{a_{11}, 1/(1-a_{22}h)\}$. Тогда из первого уравнения системы (11) с учетом неравенств (12)–(14) получим

$$\sup_{t\ge 0}\left(E|\gamma(t)\bar{x}(t)|^{2p}\right)^{1/(2p)} \le \left(E|b_1|^{2p}\right)^{1/(2p)} + \frac{a_{12}}{(a_{11}-\lambda)}\sup_{t\ge 0}\left(E|\gamma(t)\bar{x}(t)|^{2p}\right)^{1/(2p)} +$$
$$+\frac{c_p b_{11}}{\sqrt{2(a_{11}-\lambda)}}\sup_{t\ge 0}\left(E|\gamma(t)\bar{x}(t)|^{2p}\right)^{1/(2p)} + \frac{c_p b_{12}}{\sqrt{2(a_{11}-\lambda)}}\sup_{t\ge 0}\left(E|\gamma(t)\bar{\bar{x}}([t0)|^{2p}\right)^{1/(2p)}. \tag{15}$$

Из второго уравнения системы (11) с учетом неравенства (12) получим

$$\sup_{t\ge 0}\left(|\gamma(t)\bar{\bar{x}}([t])|^{2p}\right)^{1/(2p)} \le \left(E|b_2|^{2p}\right)^{1/(2p)} + \sup_{t\ge 0}\sum_{\tau=0}^{[t]-1}(\gamma(t)/\gamma(\tau))(1-a_{22}h)^{[t]-\tau-1}\times$$
$$\times\Bigg[|a_{21}|h\left(E|\gamma(\tau)\bar{x}(\tau)|^{2p}\right)^{1/(2p)} + c_p\sqrt{h}\,|b_{21}|\left(E|\gamma(\tau)\bar{x}(\tau)|^{2p}\right)^{1/(2p)} +$$
$$+c_p\sqrt{h}\,|b_{22}|\left(E|\gamma(\tau)\bar{\bar{x}}(\tau)|^{2p}\right)^{1/(2p)}\Bigg] \le$$
$$\le \sup_{t\ge 0}\left[\sum_{\tau=0}^{[t]-1}(\gamma(t)/\gamma(\tau))(1-a_{22}h)^{[t]-\tau-1}\right]\Bigg[[|a_{21}|h + c_p\sqrt{h}\,|b_{21}|]\sup_{t\ge 0}\left(E|\gamma(\tau)\bar{x}(\tau)|^{2p}\right)^{1/(2p)} +$$
$$+c_p\sqrt{h}\,|b_{22}|\sup_{t\ge 0}\left(E|\gamma(\tau)\bar{\bar{x}}(\tau)|^{2p}\right)^{1/(2p)}\Bigg]$$

В силу того, что

$$\sup_{t\ge 0}\left[\sum_{\tau=0}^{[t]-1}(\gamma(t)/\gamma(\tau))(1-a_{22}h)^{[t]-\tau-1}\right] = \sup_{t\ge 0}\left[\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\exp\{\lambda(t-[t])\}\exp\{(\lambda+\ln(1-a_{22}h))[t]\}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\{-(\lambda-\ln(1-a_{22}h))(\tau+1)\}\exp\{\lambda\}\right] \le \exp\{2\lambda\}\sup_{t\ge 0}\big[\exp\{(\lambda+\ln(1-a_{22}h))[t]$$
$$(\exp\{-(\lambda-\ln(1-a_{22}h))\} + \exp\{-2(\lambda-\ln(1-a_{22}h))\} + \ldots +$$
$$+\exp\{-(\lambda-\ln(1-a_{22}h))[t]\})\big] \le \exp\{2\lambda\}(1+\exp\{\lambda+\ln(1-a_{22}h)\}+$$
$$+\exp\{2(\lambda+\ln(1-a_{22}h))\}+\ldots) = \exp\{2\lambda\}/(1-\exp\{\lambda+\ln(1-a_{22}h)\}).$$

из предыдущих оценок следует, что

$$\sup_{t\ge 0}\left(E\left|\gamma(t)\overline{\overline{x}}([t])\right|^{2p}\right)^{1/(2p)} \le \left(E|b_2|^{2p}\right)^{1/(2p)} + \left[[|a_{21}|h + c_p\sqrt{h}|b_{21}|]\sup_{t\ge 0}\left(E\left|\gamma(\tau)\overline{x}(\tau)\right|^{2p}\right)^{1/(2p)} + \right.$$
$$\left. + c_p\sqrt{h}|b_{22}|\sup_{t\ge 0}\left(E\left|\gamma(\tau)\overline{\overline{x}}(\tau)\right|^{2p}\right)^{1/(2p)}\right]\exp\{2\lambda\}/(1-\exp\{\lambda+\ln(1-a_{22}h)\}). \tag{16}$$

Учитывая, что $\left(E|b_i|^{2p}\right)^{1/)2p)} \le \|b\|_{k_{2p}^2}$, из оценок (15)–(16) для решения задач (9), (1b) получим матричное неравенство вида

$$\overline{E}\widetilde{x}^{\gamma} \le \overline{C}(\lambda)\widetilde{x}^{\gamma} + \overline{c}\|b\|_{k_p^2}\overline{e}, \tag{17}$$

где $$\overline{C}(\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{21}h}{a_{11}-\lambda} + \dfrac{c_p b_{11}}{\sqrt{2(a_{11}-\lambda)}} & \dfrac{c_p b_{12}}{\sqrt{2(a_{11}-\lambda)}} \\ \dfrac{|a_{21}|h + c_p|b_{21}|\sqrt{h}}{\exp\{2\lambda\}(1-\exp\{\lambda+\ln(1+a_{22}h)\})} & \dfrac{|a_{21}|h + c_p|b_{21}|\sqrt{h}}{\exp\{2\lambda\}(1-\exp\{\lambda+\ln(1+a_{22}h)\})} \end{pmatrix} -$$

2×2 -матрица, $\overline{c}$ – некоторое положительное число.

Утверждение 1. Пусть любая норма матрицы $\overline{C}(0)$ меньше единицы. Тогда система (9) M_{2p}^{γ}-устойчива при некотором $\lambda. > 0$.

Доказательство. В силу положительной существует $\lambda. > 0$, такое, что норма матрицы $\overline{C}(\lambda)$ также будет меньше единицы. Для этого $\lambda.$ из неравенства (17) получим неравенство $\left|\widetilde{x}^{\chi}\right| \le K\|b\|_{k_{2p}^n}$, где $K = \left(1-\left\|\overline{C}(\lambda)\right\|\right)^{-1}\left|\overline{e}\right|\overline{\text{c}}$. Поскольку для решения задач (9), (1b) $x(t,b)$ имеет место равенство $x(t,b) = x(t)$ и $\|x(.,b)\|_{M_{2p}^{\gamma}} \le \left|\widetilde{x}^{\gamma}\right|$, то система (9) M_{2p}^{γ}-устойчива при некотором $\lambda. > 0$.

Утверждение доказано.

Утверждение 2. Пусть для системы (9) матрица $\overline{E} - \overline{C}(0)$ является положительно обратимой матрицей, тогда система (9) M_{2p}^{γ}-устойчива при некотором $\lambda. > 0$.

Доказательство. В силу положительной существует $\lambda. > 0$, такое, что матрица $\overline{E} - \overline{C}(\lambda)$ также будет положительно обратимой. Тогда в силу теоремы 2 получим, что система (9) M_{2p}^{γ}-устойчива при некотором $\lambda. > 0$.

Утверждение доказано.

Для установления положительной обратимости матрицы $\overline{E} - \overline{C}(0)$ можно воспользоваться результатами, изложенные в монографии [10].

Литература

1. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикладная математика и механика – 1960. – Т. 27. – С. 809–823.

2. *Красовский Н.Н., Лидский Э.А.* Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. Ч. I, II, III // Автоматика и телемеханика. – 1961. – Т. 22. – С. 1145–1150, 1273–1278, 1425–1431.

3. *Казаков И.Е., Артемьев В.М.* Оптимизация динамических систем случайной структуры. – М.: Наука, 1980.

4. *Бухалев В.А.* Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой. – М.: Наука, Физматлит, 1996.

5. *Кац И.Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. – Екатеринбург: Изд-во Уральской государственной академии путей сообщения, 1998.

6. *Mariton M*. Jump linear systems in automatic control. – Marcel Dekker, New York, 1990.

7. *Кадиев Р.И., Поносов А.В*. Положительная обратимость матриц устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями // Дифференциальные уравнения. – Минск. – 2017. – Т. 53, № 5. – С. 579–590.

8. *Кадиев Р.И.* Устойчивость решений систем линейных разностных уравнений Ито с последействием относительно начальных данных // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 7. – С. 842–850.

9. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н*. Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986.

10. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 29 января 2020 г.

УДК 517.929.4+519.21

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-2-33–42

The Stability of Solutions of a Single ITO Hybrid System Related to the Aftereffect of the Initial Data

R.I. Kadiev[1,2], Z.I. Shakhbanova[1]

[1]Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; kadiev_r@mail.ru;

[2]Dagestan Federal Research Center of RAS; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 45

The questions of q-stability ($1 \le q < \infty$) solutions of one hybrid system ITO with aftereffect according to initial data are investigated. To do this, we use the ideas and methods developed by N. V. Azbelev and his students to study the stability of solutions of deterministic functional differential equations. Sufficient conditions are obtained for the q-stability and exponential q-stability ($2 \le q < \infty$) solutions of the investigating system in terms of the parameters of the equations system.

Keywords: *stability of solutions, differential and difference equations of ITO, method of auxiliary equations.*

Received 29 January 2020