УДК 519.1

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-2-27–32

А.М. Магомедов¹, С.А. Лавренченко²

Интерпретация «нестандартных» задач как поиск путей в графе

¹ Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; tagomedtagirl@yandex.ru;

² Российский государственный университет туризма и сервиса; Россия, 141221, Московская обл., Пушкинский р-н, д/п Черкизово, ул. Главная, 99; lawrencenko@hotmail.com

Обычно под математической головоломкой понимают трудную логическую задачу, сформулированную в оригинальной форме, для решения которой, скорее, требуются интуиция и смекалка, а не глубокие знания в какой-либо области математики. Принято считать, что известные методы математики бесполезны для решения головоломки. В данной статье показано, что в ряде случаев представление головоломки в терминах теории графов позволяет однообразно сводить ее решение к поиску путей в ориентированных графах. Это утверждение, впервые сформулированное в известной монографии О. Оре по теории графов, получило в статье развернутую интерпретацию на примерах головоломок принципиально различной природы. В каждом случае задаче сопоставляется ориентированный граф, узлы которого соответствуют некоторым «состояниям», естественным образом определяемым из задачи, а дуги служат для указания переходов между состояниями; затем показывается, что решение задачи сводится к поиску пути между специальными узлами построенного графа.

Ключевые слова: алгоритм, дуга, узел, ориентированный граф, эквивалентный.

Введение

Нередко публикации по различным разделам дискретной математики содержат результаты, полученные с применением программного обеспечения, реализующего авторские алгоритмы, или же посвящены разработке подобных алгоритмов [1–9]. Настоящая статья также относится к названной тематике, точнее, служит подтверждением высказанной в [10, с. 51] идеи, что изложение головоломки в терминах графов позволяет свести ее решение к поиску пути из «начального» узла к некоторому «терминальному» узлу. В качестве узлов графа, соответствующего задаче, выбираются некоторые состояния, возникающие в задаче, а ребра/дуги служат для обозначения допустимых переходов между состояниями.

В разделе 2 приведено подробное решение головоломки о перевозках, раздел 3 посвящен головоломке о числе Армстронга; в обоих случаях исследуются нетривиальные обобщения известных задач.

Построение графа для задачи о переправе и поиск решения

Задачу «Ревнивые мужья» из [10, с. 52] рассмотрим в следующей «оптимизационной» постановке.

Задача 1. Три супружеские пары должны переправиться с левого берега реки на правый. Имеется только одна лодка, которая может выдержать одновременно только двоих. Как переправить всех шестерых, если никакой муж не оставит жену в присут-

ствии других мужчин? При этом требуется минимизировать количество переплытий реки лодкой.

Примем буквенные обозначения: A, a, B, b, C, c , где прописная буква соответствует мужу, а одноименная строчная буква – его супруге.

Перед каждым отплытием (и после каждого прибытия) лодки состояние на берегах реки будем рассматривать как узел ориентированного графа G , а информацию о местонахождении людей задавать структурированной меткой узла – подмножествами L и R , образованными элементами множества $\{A, a, B, b, C, c\}$, которые находятся на левом (L) и правом (R) берегах соответственно; если в рассматриваемый момент времени лодка находится на левом берегу, будем добавлять знак «+» в множество L , в противном случае знак «+» будем добавлять в R . Понятно, что в смысле информативности одно из L и R избыточно, но из соображений наглядности удобно выписывать оба множества.

Вначале G содержит лишь один узел v_1 с двухстрочной меткой

+ABCabc

$\emptyset$,

узел v_1 считается «нерассмотренным». Два узла графа G будем называть *эквивалентными*, если при замене местами каких-либо двух букв (отдельно – их прописных вариантов и отдельно – их строчных вариантов) в метке одного из этих узлов получится метка другого из этих узлов.

Пример эквивалентных узлов:

В самом деле, если в метке узла слева выполнить замены $B \rightarrow C$ и $b \rightarrow c$, то получим метку узла, расположенного справа.

Два узла графа G будем называть *зеркальными*, если при замене местами строк в метке одного из этих узлов получится узел, эквивалентный второму из этих узлов. Примеры зеркальных узлов:

Выше была описана метка, характеризующая начальный узел v_1 графа G . Как создаются новые узлы графа (и их метки) и как они соединяются?

Шаги по построению ориентированного графа G :

1) выберем из нерассмотренных узлов графа G тот узел u , который имеет наименьший номер, т. е. построен раньше других;

2) каждый узел w , такой, что:

а) w достижим из u выполнением одной-единственной переправы с соблюдением условия ревности – «если в лодке или на каком-либо берегу присутствуют строчная буква x и какая-либо прописная буква, то обязательно присутствие прописной буквы X »,

б) w не эквивалентен ни одному из ранее построенных узлов графа G ;

3) добавим к графу G вместе с дугой (u, w) в качестве нерассмотренного узла с присвоением очередного номера. После этой процедуры узел u считается рассмотренным.

Примечание. Запрет на добавление в граф узла w , соответствующего состоянию, достижимому из рассматриваемого узла u , в случае, когда граф G уже содержит эквивалентный w узел, призван исключить заикливание.

Построение графа G завершается либо при создании «терминального» узла с меткой

$$\emptyset$$

$$+ABCabc$$

(этот узел соответствует состоянию, когда все супружеские пары перевезены на правый берег), либо при возникновении ситуации, когда терминальный узел не создан и все узлы графа G рассмотрены (последнее равносильно отсутствию решения).

Из рис. 1 видно, что алгоритм построения графа завершается созданием терминального узла v_{14} . Любой путь из узла v_1 до узла v_{14} является решением. Таких путей четыре, длина каждого из них равна 11. Таким образом, наименьшее количество пересечений реки лодкой для достижения решения равно 11. Выпишем из этих решений один путь:

$$v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{14}.$$

Рис. 1. Граф для задачи о ревнивых мужьях.

В следующем утверждении через $s(u, w)$ обозначено расстояние между узлами u и w .

Утверждение. Если в построенной части графа G присутствуют зеркальные узлы v_m и v_n , $n > m$, то в графе G существует терминальный узел v_k и

$$s(v_1, v_k) \leq 2s(v_1, v_m) + s(v_m, v_n).$$

Очевидно, вершины v_7 и v_8 (рис. 1) являются зеркальными; $s(v_1, v_7) = 5$, $s(v_7, v_8) = 1$. В соответствии с Утверждением существует терминальный узел (в нашем случае v_{14}) и $s(v_1, v_{14}) \leq 2s(v_1, v_7) + s(v_7, v_8) = 10 + 1 = 11$.

О применении компьютерной программы для доказательства существования терминального узла

Для натурального числа a обозначим через $f(a)$ сумму кубов цифр в десятичном представлении числа a . Для натурального a_1 , кратного 3, обозначим через $F(a_1)$ последовательность, построенную по следующему правилу: первый элемент последовательности равен a_1 ; $a_{i+1} = f(a_i)$, $i = 1, 2, \dots$

Примеры:

1) 3, 27, 351, 153, ...

2) 6, 216, 225, 141, 66, 432, 99, 1458, 702, 351, 153, ...

3) 99, 1458, 702, 351, 153, ...

Сопоставим последовательности $F(a_1)$ ориентированный граф G , узлы которого расположены в точках $a_1, a_2, \dots$ действительной оси, и от каждого a_i проведем дугу к a_{i+1} ; наконец, начальным и терминальным узлами назовем узлы, соответствующие числам a_1 и 153. Требование головоломки, сформулированной в [9, с. 30] в несколько иных терминах ([9], с. 117, 188), заключающееся в доказательстве присутствия в графе G терминального узла, мы дополним требованием оценить длину пути от начального узла до терминального.

Лемма 1. Каждый элемент последовательности $F(a_1)$ кратен 3.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого натурального числа a , кратного 3, с десятичной записью $a = b_1b_2 \dots b_x$ сумма $b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_x^3$ кратна 3. Согласно признаку делимости на 3 сумма $b_1 + b_2 + \dots + b_x$ кратна 3, поэтому значение

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_x)^3 \quad (1)$$

также кратно 3.

Для каждой тройки попарно различных индексов i, j, k из множества $\{1, 2, \dots, x\}$ выражение (1) содержит каждое слагаемое вида b_i^3 один раз, каждое слагаемое вида $b_i b_j b_k$ – три раза, а каждое слагаемое вида $b_i b_j b_k$ – шесть раз:

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_x)^3 = b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_x^3 + 3 \cdot A + 6 \cdot B, \quad (2)$$

где A и B – некоторые целые числа.

Так как левая часть равенства (2) кратна 3, то

$b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_x^3$ кратно 3, что и требовалось доказать.

Лемма 2. Для всякого натурального a , такого, что a кратно 3 и $a \geq 1902$, справедливо неравенство $f(a) < a$.

Доказательство. Количество цифр в десятичной записи числа a обозначим через x : $a = b_1b_2 \dots b_x$. Очевидно,

$$10^{x-1} \leq a. \quad (3)$$

$$f(a) = b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_x^3 \leq 9^3 + 9^3 + \dots + 9^3 = 729 \cdot x. \quad (4)$$

Легко показать, что при $x \geq 5$

$$729x \leq 10^{x-1}. \quad (5)$$

Из (3), (4), (5) следует утверждение леммы для $a > 9999$. В справедливости утверждения леммы для $a = 1092, 1095, \dots, 9996, 9999$ легко убедиться с помощью элементарной компьютерной программы:

$738 < 1902, 855 < 1905, 1242 < 1908, \dots, 2214 < 9993, 2403 < 9996, 2916 < 9999$.

Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, что для натурального a_1 , кратного 3 и $a_1 \geq 1902$, найдется элемент a_k последовательности $F(a_1)$, такой, что $a_k < 1902$; наименьшее из таких k обозначим через $ind_{1902}(a_1)$.

В справедливости следующей леммы также легко убедиться при помощи компьютерной программы.

Лемма 3. При каждом $a_1 = 3, 6, \dots, 1902$ в каждой последовательности $F(a_1)$ элемент a_{11} равен 153.

Из лемм 1–3 немедленно вытекает следующая теорема.

Теорема. Для любого натурального a_1 , кратного 3, узел графа G с номером $10 + ind_{1902}(a_1)$ является терминальным.

Работа подготовлена при поддержке Отдела математики и информатики ДФИЦ РАН.

Литература

1. Khachatrian H.H., Mamikonyan T. On Interval edge-colorings of bipartite graphs of small order // Cornell University Library, arXiv.org>cs>arXiv:1508.02851 (Submitted on 12 Aug. 2015).
2. Petrosyan P.A., Khachatrian H.H. Interval non-edge-colorable bipartite graphs and multigraphs // Journal of Graph Theory. – 2014. – Vol. 76, № 3. – P. 200–216.
3. Магомедов А.М. Цепочечные структуры в задачах о расписаниях // Прикладная дискретная математика. – 2016. – № 3 (33). – С. 67–77.
4. Магомедов А.М., Магомедов Т.А., Лавренченко С.А. Взаимно-рекуррентные формулы для перечисления разбиений прямоугольника // Прикладная дискретная математика. – 2019. – № 46. – С. 108–121.
5. Шихиев Ш.Б., Шихиев Ф.Ш. Инкапсуляция семантических представлений в элементы грамматики // Информатика и ее применения. – 2020. – № 1.
6. Шихиев Ш.Б., Мирзабеков Я.М. Дискретный анализ в синтаксическом анализе // Информатика и её применения. – 2018. – № 12(2) – С. 98–104.
7. Шихиев Ш.Б., Мирзабеков Я.М. Формальная грамматика русского языка в примерах // Прикладная дискретная математика. – 2018. – № 40. – С. 114–126.
8. Караваев А.М., Перепечко С.Н. Задача о димерах на цилиндрах: рекуррентные соотношения и производящие функции // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26, № 11. – С. 18–22.
9. Арсак Ж. Программирование игр и головоломок. – М.: Наука, 1990. – 224 с.
10. Оре О. Теория графов. – 2-е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 336 с.

Поступила в редакцию 24 февраля 2020 г.

UDC 519.1

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-2-27–32

The Interpretation of «Non-standard» Problems as Finding Paths in a Graph

A.M. Magomedov, S.A. Lawrencenko

¹ Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; magomedtagirl1@yandex.ru

² Russian State University of Tourism and Service; Russia, 141221, Moscow region, Pushkino district, Cherkizovo, Glavnaya st., 99; lawrencenko@hotmail.com

Usually, a mathematical puzzle is perceived as a difficult logical problem formulated in its original form and requiring intuition and ingenuity rather than profound knowledge in any field of mathematics to resolve it. It is generally accepted that well-known methods of mathematics are useless for resolving puzzles. This article shows that in some cases, representing the puzzle in terms of graph theory allows you to uniformly reduce its solution to finding paths in directed graphs. This statement, first formulated in the famous monograph by O. Ore on graph theory, received in the article a convincing interpretation on the basis of examples of various types. In each case, the task is associated with a directed graph whose nodes correspond to certain “states” naturally identified in the problem, and the arrows serve to indicate transitions between states; then it is shown that the solution to the problem is reduced to finding the path between the special nodes of the constructed graph.

Keywords: *algorithm, arrow, vertex, directed graph, equivalent.*

Received 24 February 2020