МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-2-7–17

***А.Г. Баламирзоев*[1,2]*, С.А. Агаханов*[2]*, Г.С. Рагимханова*[2]**

Появление дефекта сходимости интерполяционного полинома Лагранжа по корням полиномов Чебышева в окрестности изолированной точки разрыва 1-го рода

[1] *Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; abdul2000@yandex.ru*

[2] *Дагестанский государственный педагогический университет; Россия, 367003, г. Махачкала, ул. М. Ярагского, 57*

Явление Гиббса хорошо известно для рядов Фурье и их обобщений. Оно состоит в том, что в точках разрыва первого рода функции предельное максимальное колебание частных сумм ее ряда Фурье может оказаться строго больше, чем скачок самой функции. В окрестности точек разрыва первого рода ряд Фурье сходится неравномерно, и это проявляется в том, что у суммы конечного числа членов ряда Фурье есть характерные всплески в окрестности таких точек разрыва исходной функции, частота которых увеличивается с увеличением числа слагаемых конечной суммы ряда.

Известно, что в точках непрерывности ряд Фурье сходится к значению функции, а в точке разрыва к среднему арифметическому значению для $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$, т. е. $0{,}5[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$. Каждый член ряда представляет собой непрерывную функцию, и следовательно, теорема о том, что равномерно сходящийся ряд из непрерывных функций сходится к непрерывной функции, указывает теперь на то, что в точке разрыва сходимость ряда Фурье носит особый характер.

Так как интерполяционные полиномы Лагранжа по корням полиномов Чебышева первого рода ведут себя в вопросах сходимости аналогично рядам Фурье для некоторых классов функций, естественно изучить для таких полиномов явление Гиббса в окрестности точек разрыва первого рода.

В данной работе мы доказываем наличие явления Гиббса для интерполяционных полиномов Лагранжа, построенных по корням полиномов Чебышева первого рода для функции $f(x) = sign(x - x_0)$ в любой точке $x_0 \in (-1,1)$.

Ключевые слова: *ряд Фурье, явление Гиббса, полином Лагранжа, полином Чебышева, сумма ряда.*

Введение

Как видно из анализа, если функциональный ряд из непрерывных функций равномерно сходится на некотором отрезке, то предельная функция является непрерывной на этом же отрезке. В конце XIX века на частном примере тригонометрического ряда Гиббсом (J.W. Gibbs) [1, с. 552–553] было отмечено явление, которое позже было названо его именем. Оно состоит в следующем. Если взять ряд Фурье функции *f(x)*, определяемой равенствами

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, -\pi < x < 0, \\ 0, x = 0, \pm\pi, \\ \frac{\pi}{2}, 0 < x < \pi, \end{cases}$$

т. е. ряд

$$f(x) = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\nu-1} \sin(2\nu-1)x, \qquad (1)$$

и обозначить через $S_n(x)$ сумму первых n членов ряда (1), тогда для любого $x \in [-\pi, \pi]$, будет выполняться равенство

$$\lim_{n\to\infty\infty} S_n(x) = f(x),$$

однако при этом

$$\overline{\lim_{\substack{x\to 0+0 \\ n\to\infty\infty}}} S_n(x) > \frac{\pi}{2}.$$

Известны теоремы В.И. Крылова [2–6] о поведении интерполяционных полиномов Лагранжа по корням полиномов Чебышева для функции, имеющей на отрезке [–1; 1] ограниченную вариацию. Из них вытекает, что последовательности интерполяционных полиномов Лагранжа по корням полиномов Чебышева ведут себя, как ряды Фурье для непрерывной функции.

Поэтому естественна следующая постановка задачи. Пусть $x_k^{(n)} = cos\theta_k^{(n)}$ ($\theta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n}\pi, 1 \le k \le \pi$) нули полинома Чебышева $T_n(x) = cos(n \cdot arccosx)$. Обозначим через $L_n(f, x)$ интерполяционный полином Лагранжа по узлам $x_k^{(n)}$ для функции $f(x)$, т. е.

$$L_n(f; x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^{(n)}\right) \cdot \frac{T_n(x)}{\left(x - x_k^{(n)}\right) \cdot T_n'\left(x_k^{(n)}\right)}.$$

Изучить в случае функции

$$f_0(x) = \begin{cases} -1, -1 \le x < x_0, \\ 0, x = x_0, \\ 1, x_0 < x \le 1, \end{cases}$$

где $x_0 \in (-1, 1)$ фиксированная точка, для полиномов Лагранжа $L_n(f_0; x)$ явление Гиббса в точке x_0.

Имеет место следующая

Теорема. В принятых выше обозначениях выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x_0+0 \\ n\to\infty\infty}}} \frac{L_n(f_0; x)}{f_0(x)} > 1.$$

Доказательство. Будем различать два случая: 1-й случай $x_0 \in (0, 1)$ (случай $-1 < x_0 < 0$ рассматривается аналогично); 2-й случай $x_0 = 0$.

1 случай. Пусть $0 < x_0 < 1$ и $x_0 = cos\theta_0$. Пока будем считать, что $x_0 \ne x_k^{(n)}$ $(1 \le k \le n)$; $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Допустим, что $x_{k_0+1}^{(n)} < x_0 < x_{k_0}^{(n)}$. Положим $\overline{x_n} = cos\overline{\theta_n}$, где $\overline{\theta_n} = \frac{\theta_{k_0-1}^{(n)} + \theta_{k_0}^{(n)}}{2}$.

Тогда

$$L_n(f_0,\overline{x_n}) = T_n(\overline{x_n})\left\{\sum_1^{k_0}\frac{1}{\left(\overline{x_n}-x_k^{(n)}\right)T_n'\left(x_k^{(n)}\right)} - \sum_{k_0+1}^{n}\frac{1}{\left(\overline{x_n}-x_k^{(n)}\right)T_n'\left(x_k^{(n)}\right)}\right\}.$$

Так как

$$T_n'\left(x_k^{(n)}\right) = n\cdot\frac{\sin\left(n\cdot arccos x_k^{(n)}\right)}{\sqrt{1-x_k^{(n)^2}}} = n\cdot\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{\sin\theta_k^{(n)}} = n\frac{(-1)^{k+1}}{\sin\theta_k^{(n)}},$$

то

$$L_n(f_0,\overline{x_n}) = \frac{\cos n\overline{\theta_n}}{n}\left\{\sum_1^{k_0}\frac{(-1)^{k+1}\sin\theta_k^{(n)}}{\cos\overline{\theta_n}-\cos\theta_k^{(n)}} - \sum_{k_0+1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{\sin\theta_k^{(n)}}{\cos\overline{\theta_n}-\cos\theta_k^{(n)}}\right\}.$$

Положим для краткости

$$A_k^{(n)} = \frac{\sin\theta_k^{(n)}}{\cos\overline{\theta_n}-\cos\theta_k^{(n)}}$$

и будем считать для определенности $k_0 = 2\cdot N$ четным числом. Тогда будем иметь

$$L_n(f_0,\overline{x_n}) = \frac{\cos n\overline{\theta_n}}{n}\left\{\sum_1^{2N}(-1)^{k+1}A_k^{(n)} - \sum_{2N+1}^{n}(-1)^{k+1}A_k^{(n)}\right\} =$$

$$= \frac{\cos n\overline{\theta_n}}{n}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left(A_{2k-1}^{(n)}-A_{2k}^{(n)}\right) + \sum_{k_0+1}^{n}\left(A_{2k}^{(n)}-A_{2k-1}^{(n)}\right) - A_n^{(n)}\right\},$$

где $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ и при n четном в последней строке слагаемое $A_n^{(n)}$ надо опустить. Так как

$$\overline{\theta_n} = \frac{\theta_{k_0-1}^{(n)}+\theta_{k_0}^{(n)}}{2} = \frac{k_0-1}{n}\pi,$$

то $\cos n\overline{\theta_n} = (-1)^{k_0-1} = -1$, поскольку k_0 – четное число.

С другой стороны,

$$A_{2k-1} - A_{2k} = \frac{\sin\theta_{2k-1}^{(n)}}{\cos\overline{\theta_n}-\cos\theta_{2k-1}^{(n)}} - \frac{\sin\theta_{2k}^{(n)}}{\cos\overline{\theta_n}-\cos\theta_{2k}^{(n)}} =$$

$$= \frac{\left(\sin\theta_{2k-1}^{(n)}-\sin\theta_{2k}^{(n)}\right)\cos\overline{\theta_n} + \left(\sin\theta_{2k}^{(n)}\cos\theta_{2k-1}^{(n)} - \sin\theta_{2k-1}^{(n)}\cos\theta_{2k}^{(n)}\right)}{\left(\cos\overline{\theta_n}-\cos\theta_{2k-1}^{(n)}\right)\left(\cos\overline{\theta_n}-\cos\theta_{2k}^{(n)}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sin\theta_{2k-1}^{(n)}-\sin\theta_{2k}^{(n)}\right)\cos\overline{\theta_n} + \sin\frac{\pi}{n}}{\left(\cos\overline{\theta_n}-\cos\theta_{2k-1}^{(n)}\right)\left(\cos\overline{\theta_n}-\cos\theta_{2k}^{(n)}\right)} = \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}}.$$

Поэтому

$$L_n(f_0,\overline{x_n}) = -\frac{1}{n}\left\{\sum_1^{N}\frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - \sum_{N+1}^{m}\frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - A_n^{(n)}\right\}.$$

Далее, имеем

$$J_k^{(1)} = 2\cos\frac{\theta_{2k-1}^{(n)}+\theta_{2k}^{(n)}}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{m}\right)\cos\overline{\theta_n} + \sin\frac{\pi}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right);$$

$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ означает, что $|a_n| \le C\frac{1}{n}$, где C – абсолютная постоянная (вообще, всюду в дальнейшем $O(1)$ либо абсолютная постоянная, либо зависит только от x_0).

Поэтому, положив $\nu = \left[\frac{n}{4}\right]$, получим

$$\sum_{\nu+1}^{m} \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - A_n^{(n)} = O(n^{-1}) \left\{ \sum_{\nu+1}^{m} \frac{1}{\left|J_k^{(2)}\right|} + \left|A_n^{(n)}\right| \right\}.$$

Отсюда, воспользовавшись тем, что для всех $\nu + 1 \le k \le m$ (равномерно) $J_k^{(2)} = \left(\overline{x_n} - x_{2k-1}^{(n)}\right) \ge \overline{x_n^2} \ge x_0^2$ (поскольку $x_{2k}^{(n)} \le 0, x_{2k-1}^{(n)} \le 0$) и, кроме того, $A_n^{(n)} = O(1)$, получим

$$\sum_{\nu+1}^{m} \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - A_n^{(n)} = O\left(\frac{1}{n}\right) \{(m - \nu) + 1\} = O(1).$$

Поэтому

$$L_n(f_0, \overline{x_n}) = -\frac{1}{n} \left\{ \sum_{1}^{N} \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - \sum_{N+1}^{\nu} \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} \right\} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Применение формулы Тейлора к разности $\sin\theta_{2k-1}^{(n)} - \sin\theta_{2k}^{(n)}$ дает для $J_k^{(1)}$

$$J_k^{(1)} = \sin\frac{\pi}{n} + \cos\overline{\theta_n} \left(\cos\theta_{2k}^{(n)} \left(\theta_{2k-1}^{(n)} - \theta_{2k}^{(n)}\right) + O\left(\left(\theta_{2k-1}^{(n)} - \theta_{2k}^{(n)}\right)^2\right) \right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\cos\overline{\theta_n}\cos\theta_{2k}^{(n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{\pi}{n}\cos\overline{\theta_n}\cos\theta_{2k}^{(n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi}{n}\left(1 - \cos\overline{\theta_n}\cos\theta_{2k}^{(n)}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Но

$$1 - \cos\overline{\theta_n}\cos\theta_{2k}^{(n)} = 1 - \cos^2\overline{\theta_n} + \cos\overline{\theta_n}\left(\cos\overline{\theta_n} - \cos\theta_{2k}^{(n)}\right) =$$

$$= \sin^2\overline{\theta_n} + 2\cos\overline{\theta_n} \cdot \sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k}^{(n)}}{2} \sin\frac{\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}}{2} = \sin^2\overline{\theta_n} + O\left(\left|\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right|\right).$$

Поэтому

$$J_k^{(1)} = \frac{\pi}{n}\sin^2\overline{\theta_n} + O\left(\frac{\left|\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right|}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi}{n}\sin^2\overline{\theta_n} + O\left(\frac{\left|\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right|}{n} \right).$$

Так как $\frac{2}{\pi}|t| < |\sin t| < |t|$ для $|t| \le \frac{\pi}{2}$, то для этих же t будет $\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = O(|t|)$, поэтому

$$\left\{J_k^{(2)}\right\}^{-1} = \left\{ 4\sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2} \sin\frac{\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}}{2} \sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k}^{(n)}}{2} \sin\frac{\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}}{2} \right\}^{-1} =$$

$$= \left\{ 2\left(\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right) \sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2} \sin\frac{\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}}{2} \sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k}^{(n)}}{2} \right\}^{-1} = O\left(\left| \frac{\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}}{\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}} \right| \right).$$

Здесь мы воспользовались еще и тем, что

$$\sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2} \sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k}^{(n)}}{2} \ge \sin^2\frac{\overline{\theta_n}}{2} \quad \text{для } 1 \le k \le \nu. \qquad (*)$$

Применение еще раз аналогичного рассуждения дает

$$\left\{J_k^{(2)}\right\}^{-1} = \left\{\left(\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right)\left(\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right)\sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2}\sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k}^{(n)}}{2}\right\}^{-1} + \\ +O\left\{\left|\frac{\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}}{\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}}\right| + \left|\frac{\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}}{\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}}\right|\right\}.$$

Заметим, наконец, что

$$\sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2}\sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k}^{(n)}}{2} = \sin^2\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k}^{(n)}}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\overline{\theta_n} + \theta_{2k}^{(n)}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left\{1 - \cos 2\overline{\theta_n} + \left(\cos 2\overline{\theta_n} - \cos\left(\overline{\theta_n} + \theta_{2k}^{(n)}\right)\right)\right\} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ = \sin^2\overline{\theta_n} + O\left(\left|\overline{\theta_n} - \theta_{2k}^{(n)}\right| + \frac{1}{n}\right) = \sin^2\overline{\theta_n} + O\left(\left|\overline{\theta_n} - \theta_{2k}^{(n)}\right|\right).$$

Отсюда (с учетом выражения (*)) следует

$$\left\{J_k^{(2)}\right\}^{-1} = \left\{\left(\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right)\left(\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right)\sin^2\overline{\theta_n}\right\}^{-1} + \\ +O\left\{\left|\frac{\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}}{\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}}\right| + \left|\frac{\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}}{\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}}\right| + \frac{1}{\left|\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right|}\right\}.$$

Так как

$$\frac{1}{2} < \left|\frac{\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}}{\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}}\right| = \left|\frac{4k - 2k_0 - 1}{4k - 2k_0 + 1}\right| < 2 \quad \text{для } 1 \le k \le \nu,$$

то

$$\left\{J_k^{(2)}\right\}^{-1} = \frac{4n^2}{\pi^2(4k - 2k_0 + 1)(4k - 2k_0 - 1)\sin^2\overline{\theta_n}} + O\left(\frac{n}{|4k - 2k_0 - 1|}\right). \qquad (**)$$

Отсюда, в частности, следует

$$\left\{J_k^{(2)}\right\}^{-1} = O\left(\frac{n^2}{(4k - 2k_0 - 1)^2}\right).$$

Поэтому вклад остаточного члена для $J_k^{(1)}$ дает для разности

$$\sum_1^N \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - \sum_{N+1}^{\nu} \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}}$$

величину порядка

$$O(1)\sum_1^{\nu} \frac{n^2}{(4k - 2k_0 - 1)^2} \cdot \frac{(4k - 2k_0 - 1)}{n^2} = O(\ln n).$$

Итак, окончательно имеем

$$L_n(f_0, \overline{x_n}) = -\frac{1}{n}\left\{\sum_1^N \frac{\pi\sin^2\overline{\theta_n}}{nJ_k^{(2)}} - \sum_{N+1}^{\nu} \frac{\pi\sin^2\overline{\theta_n}}{nJ_k^{(2)}}\right\} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Остаточный член в формуле (**) дает для $L_n(f_0, \overline{x_n})$ тоже величину порядка

$$O(1)\sum_1^{\nu} \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{|4k - 2k_0 - 1|} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Следовательно,

$$L_n(f_0,\overline{x_n}) = -\frac{4n}{n\pi}\left\{\sum_1^N \frac{1}{(4k-2k_0+1)(4k-2k_0-1)} - \sum_{N+1}^{\nu}\frac{1}{(4k-2k_0+1)(4k-2k_0-1)}\right\} +$$

$$+O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = -\frac{4}{\pi}\left\{-1+\sum_1^{N-1}\frac{1}{(16k^2-1)} - \sum_{N+1}^{\nu-N}\frac{1}{(16k^2-1)}\right\} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Так как (в силу неравенств $x_{k_0+1}^{(n)} < \overline{x_n} < x_{k_0}^{(n)}$) $k_0 = \frac{\theta_0}{\pi}n + \lambda$,

где $|\lambda| \le \frac{1}{2}$, то

$$\nu - N = \left[\frac{n}{4}\right] - \frac{1}{2}k_0 = \frac{n}{4} - \lambda_1 - \frac{\theta_0}{2\pi}n - \frac{1}{2}\lambda = \left(\frac{1}{2} - \frac{\theta_0}{\pi}\right)\frac{n}{2} - \lambda_1 - \frac{\lambda}{2},$$

где $0 \le \lambda_1 < 1$.

Поскольку $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$, то для $n \to \infty$ будет $\nu - N \to \infty$.

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} L_n\,(f_0,\overline{x_n}) = \frac{4}{\pi} > 1,$$

ибо для $N-1 > \nu - N$ (случай $N-1 \le \nu - N$ рассматриваем аналогично):

$$\sum_1^{N-1}\frac{1}{(4k)^2-1} - \sum_{N+1}^{\nu-N}\frac{1}{((4k)^2-1)} = \sum_{\nu+1}^{N-1}\frac{1}{(4k)^2-1} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

В самом начале работы мы считали, что $x_0 \ne x_k^{(n)}$ для $1 \le k \le n$; $n = 1,2,3,\ldots$. Очевидно, что существует бесконечная последовательность $n_1 < n_2 < \cdots$, такая, что $x_0 \ne x_k^{(n_i)}$ для $1 \le k \le n_i$ и $i = 1,2,3,\ldots$, ибо в противном случае было бы $x_0 = x_k^{(n)}$ при $n \ge N$ и некоторых $k = k(n)$, т. е. $\frac{\theta_0}{\pi} = \frac{2k(n)-1}{2n}$, что возможно только при $\frac{\theta_0}{\pi}$ рациональном.

Если же интерполяционный полином Лагранжа дает явление Гиббса во всех иррациональных точках, то из плотности множества иррациональных чисел во множестве действительных чисел следует наличие явления Гиббса и в любой рациональной точке.

2-й случай. Пусть $x_0 = 0$. Тогда, положив $x = \cos\theta$, $n = 2m$ (для определенности мы считаем n четным), получим

$$L_n(f_0,x) = \frac{\cos n\theta}{n}\left\{\sum_1^m(-1)^{k+1}\frac{\sin\theta_k^{(n)}}{\cos\theta - \cos\theta_k^{(n)}} - \sum_{m+1}^{2m}(-1)^{k+1}\frac{\sin\theta_k^{(n)}}{\cos\theta-\cos\theta_k^{(n)}}\right\}.$$

Введя во второй сумме замену $k = 2m - \tilde{k} + 1$ и заменив снова $\tilde{k}$ на k, получим

$$L_n(f_0,x) = \frac{\cos n\theta}{n}\left\{\sum_1^m(-1)^{k+1}\frac{\sin\theta_k^{(n)}}{\cos\theta - \cos\theta_k^{(n)}} + \sum_1^m(-1)^{k+1}\frac{\sin\theta_k^{(n)}}{\cos\theta+\cos\theta_k^{(n)}}\right\}.$$

Так как справедливо неравенство $\theta_{k_0}^{(n)} < \theta_0 < \theta_{k_{0+1}}^{(n)}$, то отсюда следует

$$\frac{k_0}{n} - \frac{1}{2n} < \frac{\theta_0}{\pi} < \frac{k_0}{n} + \frac{1}{2n}, \text{т. е. } \frac{k_0}{n} = \frac{\theta_0}{\pi} - \delta, \text{где } |\delta| < \frac{1}{2n}, \text{или}$$

$$k_0 = \frac{\theta_0}{\pi}n + \lambda, \text{где } |\lambda| < \frac{1}{2}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\sin\theta_{2m-\tilde{k}+1}^{(n)} = \sin\theta_{\tilde{k}}^{(n)}$ и $\cos\theta_{2m-\tilde{k}+1}^{(n)} = -\cos\theta_{\tilde{k}}^{(n)}$.

Отсюда следует

$$L_n(f_0, x) = \frac{\cos n\theta}{n} \sum_1^m (-1)^{k+1} \frac{2\cos\theta \sin\theta_k^{(n)}}{\cos\theta - \cos^2\theta_k^{(n)}}.$$

Пусть

$$\overline{\theta_n} = \frac{1}{2}\left(\theta_{m-1}^{(n)} + \theta_m^{(n)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2m-3}{2n}\pi + \frac{2m-1}{2n}\pi\right) = \frac{1}{2}\frac{2n-4}{2n}\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$$

и $\overline{x_n} = \cos\overline{\theta_n}$. Тогда

$$L_n(f_0, \overline{x_n}) = \frac{\cos n\overline{\theta_n}}{n} \sum_1^m (-1)^{k+1} \frac{2\cos\overline{\theta_n} \sin\theta_k^{(n)}}{\cos^2\overline{\theta_n} - \cos^2\theta_k^{(n)}} =$$

$$= \frac{2(-1)^m \sin\frac{\pi}{n}}{n} \sum_1^m (-1)^k \frac{2\sin\theta_k^{(n)}}{\sin^2\theta_k^{(n)} - \sin^2\theta_n}.$$

Положим $A_k^{(n)} - \sin^2\theta_k^{(n)} - \sin^2\overline{\theta_n}$. Тогда

$$A_k^{(n)} = \left(\sin\theta_k^{(n)} - \sin\overline{\theta_n}\right)\left(\sin\theta_k^{(n)} + \sin\overline{\theta_n}\right) = 2\cos\frac{\theta_k^{(n)} + \overline{\theta_n}}{2} \sin\frac{\theta_k^{(n)} - \overline{\theta_n}}{2} \times$$

$$\times 2\sin\frac{\theta_k^{(n)} + \overline{\theta_n}}{2} \cos\frac{\theta_k^{(n)} - \overline{\theta_n}}{2} = \sin\left(\theta_k^{(n)} + \overline{\theta_n}\right) \sin\left(\theta_k^{(n)} + \overline{\theta_n}\right).$$

Поэтому, считая (для определенности) $m = 2N$ четным, получим

$$L_n(f_0, \overline{x_n}) = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}(-1)^m}{n} \sum_1^N \left(\frac{\sin\theta_{2k}^{(n)}}{A_{2k}} - \frac{\sin\theta_{2k-1}^{(n)}}{A_{2k-1}}\right) =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{n}(-1)^m}{n} \sum_1^N \frac{\sin\theta_{2k}^{(n)}\left(\sin^2\theta_{2k-1}^{(n)} - \sin^2\overline{\theta_n}\right) - \sin\theta_{2k-1}^{(n)}\left(\sin^2\theta_{2k}^{(n)} - \sin^2\overline{\theta_n}\right)}{A_{2k}A_{2k-1}}$$

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{n}(-1)^m}{n} \times$$

$$\times \sum_1^N \frac{\sin\theta_{2k-1}^{(n)} \sin\theta_{2k}^{(n)}\left(\sin\theta_{2k-1}^{(n)} - \sin\theta_{2k}^{(n)}\right) + \sin^2\overline{\theta_n}\left(\sin\theta_{2k-1}^{(n)} - \sin\theta_{2k}^{(n)}\right)}{A_{2k}A_{2k-1}} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{n}(-1)^{m+1}}{n} \times \sum_1^N \frac{\left(\sin\theta_{2k}^{(n)} - \sin\theta_{2k-1}^{(n)}\right) - \left(\sin^2\overline{\theta_n} + \sin\theta_{2k}^{(n)}\sin\theta_{2k-1}^{(n)}\right)}{\sin\left(\theta_{2k}^{(n)} + \overline{\theta_n}\right)\sin\left(\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right)\sin\left(\theta_{2k-1}^{(n)} + \overline{\theta_n}\right)\sin\left(\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right)}.$$

Обозначим k-тое слагаемое в последней сумме через $\dfrac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}}$.

Так как

$$\cos\frac{\theta_{2k}^{(n)} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_{2k}^{(n)} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{n-4k+4}{2n}\pi \sim \frac{n-4k+4}{2n},$$

то

$$J_k^{(1)} = 2\cos\frac{\theta_{2k}^{(n)} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2} \sin\frac{\pi}{n}\left(\sin^2\overline{\theta_n} + \sin\theta_{2k-1}^{(n)}\sin\theta_{2k}^{(n)}\right) \sim \frac{n-4k+4}{2n}. \qquad (2)$$

Далее из равенства

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + O(|x|) \text{ } \textit{для} \text{ } |x| \le C < \pi$$

следует

$$\frac{1}{\sin\left(\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right)} = \frac{1}{\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}} + O\left(\left|\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right|\right), \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sin\left(\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right)} = \frac{1}{\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}} + O\left(\left|\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right|\right). \quad (4)$$

По той же причине из равенства

$$\sin\left(\theta_{2k}^{(n)} + \overline{\theta_n}\right) = \sin\frac{n-4k+3}{2n}\pi n \sin\left(\theta_{2k-1}^{(n)} + \overline{\theta_n}\right) = \sin\frac{n-4k+5}{2n}\pi$$

следуют равенства

$$\frac{1}{\sin\left(\theta_{2k}^{(n)} + \overline{\theta_n}\right)} = \frac{2n}{\pi(n-4k+3)} + O\left(\frac{n-4k+3}{n}\right), \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sin\left(\theta_{2k-1}^{(n)} + \overline{\theta_n}\right)} = \frac{2n}{\pi(n-4k+3)} + O\left(\frac{n-4k+5}{n}\right). \quad (6)$$

Если теперь в выражении для $L_n(f_0, \overline{x_n})$ воспользуемся оценкой (2) и оценками (3)–(6), то вклад остаточных членов будет

$$O\left(\frac{1}{n^2}\right)\sum_1^N \frac{n-4k+1}{n^2}\cdot\left(\frac{n}{n-4k+1}\right)^3\cdot\frac{n-4k+1}{n} =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right)\sum_1^N \frac{1}{n-4k+1} = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Поэтому

$$L_n(f_0, \overline{x_n}) = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}(-1)^{m+1}}{n} \times$$

$$\times \sum_1^N \frac{16n^4 J_k^{(1)}}{\pi^4(n-4k-1)(n-4k+1)(n-4k+3)(n-4k+5)} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Далее,

$$J_k^{(1)} = \left(2 - (1-\sin^2\overline{\theta_n}) - \left(1 - \sin\theta_{2k-1}^{(n)}\sin\theta_{2k}^{(n)}\right)\right)\left(\sin\theta_{2k}^{(n)} - \sin\theta_{2k-1}^{(n)}\right).$$

Так как [1]

$$1-\sin^2\overline{\theta_n} = \cos^2\overline{\theta_n} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \overline{\theta_n}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

$$1 - \sin\theta_{2k-1}^{(n)}\sin\theta_{2k}^{(n)} = \left(1 - \sin\theta_{2k}^{(n)}\right) + \sin\theta_{2k}^{(n)}\left(1 - \sin\theta_{2k-1}^{(n)}\right) =$$

$$= 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{2k}^{(n)}\right) + \sin\theta_{2k}^{(n)}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{2k}^{(n)}\right)\right) =$$

$$= 2\sin^2\frac{\frac{\pi}{2} - \theta_{2k}^{(n)}}{2} + 2\sin\theta_{2k}^{(n)}\sin^2\frac{\frac{\pi}{2} - \theta_{2k-1}^{(n)}}{2} = O\left(\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{2k}^{(n)}\right)^2\right) =$$

[1] Для двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ запись $a_n \sim b_n$ означает, что $0 < C_1 < \frac{a_n}{b_n} < C_2 < \infty$, где C_1, C_2 – постоянные числа.

$$= O\left(\frac{(n-4k+1)^2}{n^2}\right),$$

$$\sin\theta_{2k}^{(n)} - \sin\theta_{2k-1}^{(n)} = = 2\cos\frac{\theta_{2k}^{(n)} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2}\sin\frac{\pi}{2n} = 2\cos\frac{\theta_{2k}^{(n)} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2}\left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right),$$

то

$$J_k^{(1)} = \frac{2\pi}{n}\cos\frac{\theta_{2k}^{(n)} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2} + O\left(\frac{1}{n^3} + \frac{(n-4k+1)^2}{n^3}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{n}\cos\frac{\theta_{2k}^{(n)} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2} + O\left(\frac{(n-4k+1)^2}{n^3}\right).$$

Если заметить еще, что

$$\cos\frac{\theta_{2k}^{(n)} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8k-4}{4n}\pi\right) = \sin\frac{n-4k+1}{n}\pi =$$

$$= \frac{n-4k+2}{2n}\pi + O\left(\left(\frac{n-4k+2}{n}\right)^3\right),$$

то окончательно получим

$$J_k^{(1)} = \frac{\pi^2}{n^2}(n-4k+2) + O\left(\frac{(n-4k+1)^2}{n^3}\right).$$

Поэтому с учетом четности m имеем

$$L_n(f_0, \overline{x_n}) = -\frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{n}\frac{16n^4}{\pi^4}\cdot\frac{\pi^2}{n^2}\times$$

$$\times\sum_1^N \frac{n-4k+2}{(n-4k+1)(n-4k-1)(n-4k+3)(n-4k+5)} + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= -\frac{32}{\pi}\sum_1^N \frac{n-4k+2}{(n-4k+1)(n-4k-1)(n-4k+3)(n-4k+5)} + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= -\frac{32}{\pi}\left\{-\frac{2}{15} + \sum_1^N \frac{n-4k+2}{(n-4k+1)(n-4k-1)(n-4k+3)(n-4k+5)}\right\} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Положив $N - k = \tilde{k}$ и заменив снова $\tilde{k}$ на k, получим

$$L_n(f_0, \overline{x_n}) = \frac{32}{\pi}\left\{\frac{2}{15} - \frac{1}{64}\sum_1^{N-1}\frac{k+\frac{1}{2}}{\left(k^2 - \frac{1}{16}\right)\left(k+\frac{3}{4}\right)\left(k+\frac{5}{4}\right)}\right\} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{k+\frac{1}{2}}{\left(k^2-\frac{1}{16}\right)\left(k+\frac{3}{4}\right)\left(k+\frac{5}{4}\right)} \le \sum_1^{N-1}\frac{1}{k\left(k^2-\frac{1}{16}\right)} < \frac{16}{15} + \sum_{k=2}^{N-1}\frac{1}{k^3} < \frac{31}{15},$$

отсюда и из предыдущего равенства следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} L_n(f_0, \overline{x_n}) > 1.$$

Значит, полиномы Лагранжа $L_n(f_0,\, x)$ в окрестностях точки x_0 дают явление Гиббса.

Литература

1. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. – М.: Наука, 2003. Т. 3. – 662 с.

2. *Агаханов С.А., Натансон Г.И.* Явление Гиббса при некоторых процессах суммирования рядов Фурье // ДАН СССР. – 1965. – Т. 162, № 6. – С. 1215–1218.

3. *Агаханов С.А.* Явление Гиббса при некоторых процессах суммирования обобщенных рядов Фурье // Функциональный анализ, теория функций и их приложения: сб. ст. – Махачкала, 1974. – Вып. 1. – С. 21–26.

4. *Агаханов С.А.* Явление Гиббса в теории тригонометрических рядов: дис. … канд. физ.-мат. наук. – Л., 1974. – 57 с.

5. *Баламирзоев А.Г., Агаханов С.А.* Поведение интерполяционных многочленов в окрестности точек разрыва первого рода // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естественные науки. – 2019. – № 4. – С. 8–11.

6. *Натансон Г.И.* Явление Гиббса для сумм Валле–Пуссена // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функции: сб. ст. – М.: Физматлит, 1961. – С. 206–213.

7. *Киселев В.Г.* Парадокс Гиббса и его решение // Изв. вузов. Проблемы энергетики. – 2016. – № 11. – С. 129–137.

8. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* Об условиях выпуклости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам // Дагестанские электронные математические известия. – 2017. – № 8. – С. 1–6.

9. *Paul J.S., Krishna U., Pillai S.* A higher dimensional homodyne filter for phase sensitive partial. Fourier reconstruction of magnetic resonance imaging // Magnetic Resonance Imaging. – 2015. – Vol. 33, Issue 9. – P. 1114–1125.

10. Questions and Answers in MRI [Электронный ресурс] / Partial Fourier Techniques, 2017 – Режим доступа: http://mri-q. com/ partial-fourier.html

11. *Шакиров И.А.* О фундаментальных характеристиках семейства интерполяционных полиномов Лагранжа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, вып. 1 (2). – С. 99–104.

Поступила в редакцию 23 января 2020 г.

UDC 517.51

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-2-7–17

The Gibbs Phenomenon for Polynomial Interpolation of Lagrange on the Roots of Chebyshev Polynomials

A.G. Balamirzoev[1,2], S.A. Agakhanov[2], G.S. Ragimkhanova[2]

[1] *Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; abdul2000@yandex.ru*

[2] *Dagestan State Pedagogical University; Russia, 367003, Makhachkala, M. Yaragsky st., 57*

The Gibbs phenomenon is well known for Fourier series and their generalizations and consists in the fact that at the points of discontinuity of the first kind of function, the limiting maximum oscillation of the partial sums of its Fourier series can be strictly greater than the jump of the function itself. In the neighborhood of break points of the first kind, the Fourier series converges unevenly, and this is manifested in the fact that the sum of a finite number of terms of the Fourier series has characteristic bursts in the neighborhood of such break points of the original function, the frequency of which increases with the number of terms of the finite sum of the series.

It is known that at each continuity point the Fourier series converges to the value of function, and in the discontinuity point - it converges to arithmetic value for $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$, т.е. $0{,}5[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$. Every term of series is a continuous function. Consequently, the theorem on uniformly convergent series of continuous functions converging to continuous function implies that in discontinuity points the convergence of Fourier series is peculiar.

Since the Lagrange interpolation polynomial on the roots of Chebyshev polynomials of the first kind, behave in a sense, in a similar way as Fourier series, for some classes of functions, it is natural to study the Gibbs phenomenon in the vicinity of the discontinuity points of the first kind.

In this paper we prove the presence of the Gibbs phenomenon for the Lagrange interpolation polynomial constructed from the roots of Chebyshev polynomials for the function $f(x) = sign(x - x_0)$ at any point x_0∈(–1, 1).

Keywords: *Fourier series, Gibbs phenomenon, Lagrange polynomial, Chebyshev polynomial, series sum*.

Received 23 January 2020