УДК 519.86

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-1-53–59

Р.И. Магомедов[1,2]***, И.И. Магомедов***[2]***, Е.С. Магомедова***[2]

Моделирование изменения количества воды в водохранилище с помощью стохастического дифференциального уравнения

[1]*Институт проблем геотермии ДЦ РАН; Республика Дагестан, 367030, г. Махачкала, просп. И. Шамиля, 39а;*

[2]*Дагестанский государственный университет; Россия, Республика Дагестан, 367000, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а;* magomeodova.e.s@mail.ru

В работе построена математическая модель изменения количества воды в водохранилище и функция плотности вероятности в виде стохастического дифференциального уравнения параболического типа, используя разбиение временного интервала и числовую ось на элементарные отрезки используя определение интеграла и скорость перехода точки из одного отрезка на другой. Сформулирована задача Коши для конечного пространства накоплений для функции плотности вероятности для нахождения давления воды на стенки водохранилища.

Ключевые слова: *математическая модель, водохранилище, скорость, интеграл, интервал, отрезок, дифференцирование, уравнение, стохастика, параболический тип, дифференциальное уравнение, задача Коши.*

Предположим, что для каких-то целей река перегорожена плотиной. В результате образуется водохранилище, занимаемое определенную площадь с определенным объемом воды.

Водохранилище позволяет использовать воду для выработки электроэнергии, для орошения, для обеспечения водой населенных пунктов и т. д. Следовательно, ежесекундно количество воды в водохранилище меняется. Это зависит от многих причин – от притока и оттока.

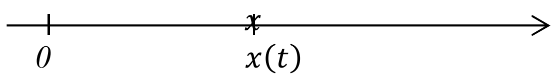
Для моделирования изменения объема воды в водохранилище обозначим через $x(t)$ функцию, характеризующую единицу измерения объема воды в водохранилище. Функция $x(t)$, зависящая от времени будем считать непрерывной и дифференцируемой.

Производная функции $x(t)$ есть предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{d\big(x(t)\big)}{dt} = x'(t), \quad (1)$$

которая будет означать скорость изменения количества единиц объема воды в водохранилище.

На числовой оси Ox отложим количество единиц $x(t)$ объема воды, в виде точки. Производная $x'(t)$ будет означать скорость изменения накопленного объема воды. В результате получаем пространство накоплений воды v в момент времени t.



которая с течением времени точка $x(t)$ перемещается по пространству S_0 со скоростью $\frac{dx}{dt}$.

Размерность скорости перемещения будем считать $\left[\frac{dx}{dt}\right] = \frac{\text{Куб.ед.}}{\text{сек.}}$. Эту скорость $x'(t)$ можно выразить различными способами. Поэтому ее обозначим через функцию двух переменных x и t, т. е. $F(x,t)$. Получим

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t),t); dx = F(x,t)dt \qquad (2)$$

Получим обыкновенное дифференциальное уравнение, которое будет описывать динамику изменения количества единиц воды в водохранилище, где $x(t)$ – неизвестная функция, а $F(x,t)$ – заданная функция. Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ известны количество единиц воды в водохранилище. Получим начальное условие

$$x(t)|_{t=0} = x_0 \qquad (3)$$

В результате получается задача Коши (2), (3) для обыкновенного дифференциального уравнения.

Вид функции $F(x,t)$ в равенстве (2) зависит от притока и оттока воды в водохранилище, т.е.

$$F = \Pi - R, \qquad (4)$$

где $\Pi = \Pi(x,t)$ выражает количество притока воды, а R – количество оттока воды из водохранилища. Если $\Pi > 0, R = 0$, то функция $x(t)$ возрастает, т. к. $\frac{dx}{dt} = \Pi > 0$. Если же $R > 0, \Pi = 0$, то $\frac{dx}{dt} = -R$, следовательно, количество воды в водохранилище уменьшается.

При стационарном состоянии притока и оттока воды, можно легко определить количество единиц воды в водохранилище, в зависимости от времени года. К примеру, $\Pi = \Pi_0 + \Pi_1$, где Π_0 – приток количества единиц воды при стационарном режиме. Если течение реки за определенное время не меняется, то $\Pi_0 = const.$ Если же приток воды меняется в зависимости от времени года, то

$$\Pi_1 = \alpha x(t).$$

Поэтому

$$\Pi = \Pi_0(t) + \alpha x(t) \qquad (5)$$

Аналогичным образом можно посчитать и количество расхода воды из водохранилища с учетом сброса, использования для выработки электроэнергии, орошения, для бытовых целей и т. д.

Для более точной математической модели необходимо по возможности детально подсчитать приток и отток воды водохранилища. В общем виде

$$dx = F(x,t)dt. \qquad (6)$$

На количество воды в водохранилище, кроме стационарного процесса, влияет и экологический процесс. Это дожди, засуха, жара, ветры. Еще и социальный прогресс. Это изменение расхода воды для выработки электроэнергии, для орошения и социальные нужды. Поэтому, необходимо в модели учесть эти процессы. Будем считать эти процессы случайными. Поэтому эти случайные действия обозначим через $X(t)$ и назовем случайной величиной, которая определяет влияние случайных факторов в момент времени t на процесс объема воды в водохранилище.

Координата x на числовой оси еще не описывает случайную величину $X(t)$, поэтому для того, чтобы случайная величина X была определена, необходимо задать функцию плотности распределения вероятностей

$$\varphi = \varphi(y,s;x,t), \qquad (7)$$

которая означает условную плотность вероятностей, т. е. вероятность события, что случайная величина из точки y в момент времени s находившаяся на одном отрезке в момент времени τ $(s < \tau < t)$ ко времени t попадает на другой отрезок на числовой оси.

Для случайной величины $X(t)$ предположим, что выполняются условия Маркова-Колмогорова-Чепмена [2], [3]. Поэтому такой случайный процесс $X(t)$, считается марковским процессом, для которой выполняются условия сильной непрерывности. При $c = 0$ и $b = 1$ из условий сильной непрерывности процесс считается ским [1], [3].

Если взять малый промежуток времени Δt, то за это время изменится, и случайная величина и примет значение $X(t + \Delta t) = X(t + dt)$ – суммарная случайная величина накопления воды в водохранилище к моменту времени $t + dt$.

Величина

$$X(t + dt) - X(t) = dX \tag{8}$$

будет означать случайное изменение объема воды в водохранилище за промежуток времени dt за счет случайного процесс. Если $dX > 0$ объем увеличивается, если $dX < 0$, то уменьшается за время dt.

Величина dX из равенства (7) называется стохастическим дифференциалом случайного процесса [1, 3, 9]

Если стохастический дифференциал (8) принимает вид функции, то получится стохастическое дифференциальное уравнение, для решения которого можно использовать формулу Ито [1, 2]. [10]

Значение стохастического дифференциала (8) прибавим к уравнению (6). Тогда получим уравнение

$$dx = F(x, t)dt + dX.$$

Получим стохастическое дифференциальное уравнение, которое в общем виде можно записать в виде [3, 4].

$$dx = F(x, t)dt + G(x, t)dX \tag{9}$$

В этом равенстве функции $F(x, t)$ и $G(x, t)$ неслучайные функции, а X – марковский стохастический процесс с функцией плотности распределения вероятностей (7).

Если известно первоначальное значение случайной величины $X(t)$ в момент времени t, то случайную величину $X(t + dt)$ можно определить плотностью вероятностей (7), потому что X является марковским процессом, и равенство (9) можно записать в виде

$$x(t + \Delta t) - x(t) = F(x(t), t)\Delta t + G(x(t), t)\big(X(t + \Delta t) - X(t)\big).$$

Разбив временной интервал на элементарные отрезки Δt_i, положив $X(t_i) = z_i$ получим для численного определения величины $x(t)$ разностное уравнение

$$x_{i+1} = F(x_i, t_i)\Delta t_i + G(x_i, t_i)z_{i+1} \tag{10}$$

Если использовать начальное условие (3) и разностную схему (10) можно получить одну из возможных траекторий случайной величины $x(t)$.

Теперь предположим, что на оси Ox имеется множества точек S_0. Координата каждой точки определяется количеством единиц объема воды в водохранилище. Дадим точке x малое приращение Δx и рассмотрим малый промежуток $[x, x + \Delta x]$. Пусть на этом промежутке в момент времени t оказалось $\Delta V(x, t)$ точек. Тогда функция

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V(x, t)}{\Delta t} = u(x, t) \tag{11}$$

будет определять плотность распределения точек.

Весь объем воды в момент времени t будет на промежутке Δx

$$V(t) = \int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,dx, \tag{12}$$

следовательно, $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) = v_0$ – объем всей воды в водохранилище.

Для нахождения значения функции плотности вероятности $u(x,t)$ необходимо получить дифференциальное уравнение. Для этого возьмем произвольный отрезок $[x_1, x_2]$ и обозначим дополнение этого отрезка на оси Ox через

$$\Omega_0 = (-\infty < x < x_1) \cup (x_2 < x < \infty).$$

С течением времени точка x будет перемещаться по оси Ox. За промежуток времени $[t_1, t_2]$ на отрезке $[x_1, x_2]$ будет находиться часть точке, некоторая часть точек выйдет из этого промежутка, часть точек попадет на этот отрезок, поэтому запишем уравнение баланса для интервала $[x_1, x_2]$ за промежуток времени $[t_1, t_2]$:

$$\Delta V_{t_1,t_2} = W_1 + W_2 + W_3, \tag{13}$$

где $\Delta V_{t_1 t_2}$ – изменение количества точек в течение времени $[t_1, t_2]$ на отрезке $[x_1, x_2]$; W_1 – количество точек, которые были на отрезке $[x_1, x_2]$ и остались за время $[t_1, t_2]$ на этом отрезке; W_2 – число точек, попавших за время $[t_1, t_2]$ на отрезок $[x_1, x_2]$ за счет случайной величины; W_3 – число точек, которые попадут на отрезок $[x_1, x_2]$ за счет перехода из других отрезков числовой оси или ухода из интервала $[x_1, x_2]$ за промежуток времени $[t_1, t_2]$.

Сначала вычислим $\Delta V_{t_1,t_2}$. Для этого используем равенство (12), получим

$$\Delta V_{t_1,t_2} = V(t_2) - V(t_1) == \int_{x_1}^{x_2} u(x,t_2)dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x,t_1)dx = \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}dxdt \tag{14}$$

Для вычисления W_1 рассмотрим произвольную точку в окрестности x_1. С течением времени эта точка $x(t)$ будет двигаться со скоростью $F(x,t)$ слева направо. За время Δt эта точка пройдет расстояние $\Delta S = F(x,t)\Delta t$ и будет находиться на отрезке $[x_1, x_2]$. Если учесть функцию плотности точек $u(x,t)$ в окрестности точки x_1 будет значение этой функции $u(x_1,t)$, то через точку x_1 на отрезок $[x_1, x_2]$ за промежуток времени Δt попадут множество точек

$$u(x_1,t)\Delta S = u(x_1,t)F(x_1,t)\Delta t \tag{15}$$

Точно так же за промежуток времени Δt на отрезок $[x_1, x_2]$ могут попасть через точку x_2 определенное количество точек

$$-u(x_2,t)\Delta S = -u(x_2,t)F(x_2,t)\Delta t \tag{16}$$

Поэтому, просуммировав эти значение (14) и (15) по всем временным промежуткам Δt_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, которые получаются, разбив промежуток времени $[t_1, t_2]$ точками t_i, на n промежутков и пронумеровав получим

$$\sum_i \Delta K_i = -\sum_i \left[u(x_2,\Delta t_i)F(x_2,\Delta t_i) - u\left(x_{1,}t_i\right)F(x_1,\Delta t_i)\Delta t_i\right]$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $t_i \to 0$, получим

$$W_1 = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\big(u(x,t)F(x,t)\big)dxdt \tag{17}$$

Для того чтобы вычислить значение W_2 необходимо рассмотреть число точек, которые переместятся на отрезок $[x_1, x_2]$ за время Δt из дополнительного множества D_0 за счет случайных процессов. Для этого множество D_0 разобьем на элементарные отрезки Δy_i. На этом элементарном отрезке Δy_i будут находиться в момент времени t количество точек $u(y_i,t)\Delta y_i$. Это количество точек распределены по всей оси Ox за время Δt с плотностью вероятностей $\varphi(y_i,t;x,t+\Delta t)$.

Если взять интеграл по промежутку $[x_1,x_2]$ за промежуток времени Δt, то получим, что точка $x(t)$ из D_0 попадает на отрезок $[x_1,x_2]$, поэтому множество таких точек будет

$$I_1=\lim_{\Delta y_i\to 0}\sum_i\int_{x_1}^{x_2} f(y_i,t;x,t+\Delta t)dx\,u(y_i,t)=$$
$$=\int\limits_{D_0}\left[\int_{x_1}^{x_2}u(y,t)f(y,t;x,t+\Delta t)dx\right]dy$$

За промежуток времени Δt точки $x(t)$ случайно могут перейти из промежутка $[x_1,x_2]$ на промежуток D_0. Поэтому

$$I_2=\int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{D_0}u(y,t)f(y,t;x,t+\Delta t)dx\right]dy$$

В результате получим прирост точек $x(t)$ за время Δt на промежуток $[x_1,x_2]$ в виде равенства

$$\Delta I=I_1-I_2=\int_{D_0}\left[\int_{x_1}^{x_2}u(y,t)f(y,t;x,t+\Delta t)dx\right]dy=$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{D_0}u(y,t)f(y,t;x,t+\Delta t)dx\right]dy$$

Если учесть интегральные преобразования [5], свойства функции плотности

$$\int_{\infty}^{\infty}f(y,s;x,t)dx=1$$

для любого $s<t,-\infty<y<\infty$, то получим

$$\Delta I=\int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}u(y,t)f(y,t;x,t+\Delta t)dy-u(x,t)\right]dx \tag{18}$$

Свойства условной плотности вероятностей [2], [3] дает оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(y,t)f(y,t;x,t+\Delta t)dy-u(x)==\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(b\,u(x)-\frac{\partial}{\partial x}c\,u(x)\right)\right]\Delta t+\bar{o}(t),$$

где b и c – постоянные из условий сильной непрерывности марковского случайного процесса.

Если подставить полученное выражение в равенство (18), то

$$\Delta I=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(b\,u)-\frac{\partial}{\partial x}(c\,u)\right]dx\,\Delta t \tag{19}$$

Теперь просуммируем значения (19) по всем интервалам Δt_i и перейдем к пределу при $\Delta t_i\to 0$, то получим [5]:

$$\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_i\Delta I_i=\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(b\,u(x,t)\big)-\frac{\partial}{\partial x}\big(c\,u(x,t)\big)\right]dxdt=W_2 \tag{20}$$

Для вычисления W_3 будем считать, что на промежуток Δx могут попадать точки $x(t)$ из других промежутков оси Ox за малый интервал времени Δt.

Обозначим такое количество точек через $\varphi(x,t)$. Следовательно:

$$W_3=\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x,t)dxdt \tag{21}$$

Если в равенство (13) подставить выражения из равенств (14), (17), (20) и (21), получим

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial t}(u(x,t)F(x,t)dxdt)$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(b\,u) - \frac{\partial}{\partial x}(c\,u)\right]dxdt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\varphi\,dxdt$$

На основании теоремы о среднем [5] опустим интегралы, так как интервалы интегрирования $[t_1, t_2]$ и $[x_1, x_2]$ произвольные. Получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(b\,u) - \frac{\partial}{\partial t}\big((c+F)u\big) + \varphi \qquad (22)$$

Это параболическое уравнение с частными производными, которому удовлетворяют плотность точек $x(t)$, определяющих накопления количества воды в водохранилище.

При отсутствии стохастического процесса будут $c = 0; b = 0$.

Если в начальный момент времени t известно количество точек $x(t)$, определяющих единицу измерения воды в водохранилище, то получим начальное условие

$$u(0) = \psi(x) \qquad (23)$$

Вместе с равенством (21) и начальным условием получим (23) задачу Коши.

Аналогичные модели мощности фирмы, денежных вкладов и материальных ценностей коммерческого банка получены в работах [6, 7, 8] и есть возможность построения математической модели с помощью стохастического дифференциального уравнения для любого процесса подвергающего случайным воздействиям в течении определенного времени.

Литература

1. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения: пер. с анг. – М.: Мир, АСТ, 2003.

2. *Ерофеенко В.Т., Козловская И.С.* Уравнения с частными производными и математические модели в экономике. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

3. *Королюк В.С. и др.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985.

4. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. – М.: Фазис, 1998.

5. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. – М.: Высшая школа, 1988.

6. *Магомедов И.И., Магомедов Р.И.* Математическое моделирования мощности фирмы с помощью стохастических дифференциальных уравнений // Научно-технический вестник Поволжья. – 2011. – № 2. – С. 112–122.

7. *Магомедов Р.И.* Моделирование банковских вкладов с помощью стохастических дифференциальных уравнений // Вестник Дагестанского государственного университета. Сер.: Естественные науки. – 2012. – Вып. 1. – С. 93–98.

8. *Магомедов Р.И., Магомедов И.И., Назаралиев М.-Ш.А.* Математическая модель денежных вкладов и материальных ценностей банка // Известия Дагестанского педагогического университета. Сер.: Естественные и точные науки. – 2013. – № 2 (23). – С. 8–12.

9. *Лаков А.А., Малышев В.А., Меликян М.В.* Новые применения стохастических методов в физике // Теория вероятностей, её применения. – 2016. – Т. 61, № 3. – С. 612–613.

10. *Кадиев Р.И., Шахбанова З.И.* Устойчивость решений линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздыванием второго порядка // Вестник ДГУ. – 2018. – Вып. 1. – С. 67–76.

Поступила в редакцию 11 октября 2019 г.

UDC 519.86

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-1-53–59

Simulation of Changes in the Amount of Water in the Reservoir Using a Stochastic Differential Equation

R.I. Magomedov[1,2], I.I. Magomedov[2], E.S. Magomedova[2]

[1]*Institute of Geothermy problems, Dagestan, Makhachkala, Imam Shamil Avenue, 39a, 367030;*

[2]*Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a;* magomeodova.e.s@mail.ru

The article presents a mathematical model of the change in the amount of water in the reservoir and the probability density function in the form of a stochastic differential equation of parabolic type, using the partition of the time interval and the numerical axis into elementary segments using the definition of the integral and the rate of transition of a point from one segment to another. The Cauchy problem for finite accumulation space for the probability density function for finding the water pressure on the reservoir walls is formulated.

Keywords: *mathematical model, reservoir, velocity, integral, interval, segment, differentiation, equation, stochastics, parabolic type, differential equation, Cauchy problem.*

Received 11 October 2019