УДК 517.956.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-1-43–52

М.М. Сиражудинов^{1,3}, С.В. Тихомирова², С.П. Джамалудинова¹

Оценки погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для системы двух уравнений Бельтрами

¹ Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; sirazhmagomed@yandex.ru, dzh-saida2012@yandex.ru;

² Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых; 600000, Владимир, ул. Горького, 87; tihomirno.svetlo@mail.ru;

³ Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45

При составлении математических моделей сильно неоднородных сред их локальные характеристики, как правило, описываются функциями вида $a(\varepsilon^{-1}x)$, где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, при этом функция $a(x)$ имеет упорядоченную структуру (она периодическая, почти периодическая, реализация однородного случайного поля и др.). Следовательно, соответствующие математические модели – это дифференциальные уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами. Ввиду быстрой осцилляции коэффициентов такие уравнения невозможно решить, даже используя современные суперкомпьютеры. Поэтому в физической литературе такие среды заменяют на так называемые эффективные среды, то есть на среды с постоянными физическими характеристиками. В математическом плане такая замена означает переход от исходного уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами, иначе говоря, к усредненному уравнению. В данной работе изучаются вопросы, связанные с усреднением и последующей оценкой погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для системы двух уравнений Бельтрами с быстро колеблющимися, периодическими коэффициентами. Получены оценки погрешности усреднения в пространствах Лебега и Соболева порядка $\sqrt{\varepsilon}$.

Ключевые слова: *уравнение Бельтрами, усреднение.*

Введение

Теория усреднения бурно развивается с середины второй половины прошлого века. Этот раздел дифференциальных уравнений имеет многочисленные приложения в различных разделах физики и механики сплошных сред. Оценки погрешности усреднения (операторные оценки усреднения) дивергентных эллиптических уравнений получены в работе [1] М.Ш. Бирмана и Т.А. Суслиной. Собственно термин «операторные оценки усреднения» ввел в обиход В.В. Жиков [2]. Изложение различных аспектов операторных оценок усреднения для дивергентных операторов можно найти в обзорной работе В.В. Жикова и С.Е. Пастуховой [3]. Наша работа посвящена оценкам погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для системы двух уравнений Бельтрами. Вопросы, связанные с усреднением, и более общие вопросы G-сходимости уравнений Бельтрами и их обобщений изучены в работах [4, 5, 6]. В этих работах усредненные уравнения получены при помощи интегральных тождеств. Такой метод не позволяет оценить скорость сходимости решения исходной задачи к решению усредненной задачи. Такие оценки нами получены методами асимптотического ана-

лиза. В работе получены оценки погрешности усреднения в пространствах Лебега и Соболева порядка $\sqrt{\varepsilon}$.

Обозначения: $\mathbb{R}^2$ – плоскость; $Q \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей; $\bar{Q}$ – замыкание области Q ; $\partial_{\bar{z}} = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 + i\mathcal{D}_2)$, $\partial_z = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 - i\mathcal{D}_2)$; $\mathcal{D}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2$; i – мнимая единица; $L_2(Q)$ – пространство Лебега комплекснозначных квадратично суммируемых вектор-функций; $W_p^k(Q)$ ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$) – пространство Соболева; $W_2^1(Q)$ – подпространство пространства $W_2^1(Q)$, состоящее из элементов с нулевым следом на границе; $\square$, $\square_T$ – квадрат со стороной, параллельной оси координат (ячейка периодов); T – длина стороны; $|\square| = T^2$ – площадь квадрата $\square$. Периодической будем называть функцию периода T по каждой переменной. $\langle u \rangle$ – среднее значение периодической функции u , то есть

$$\langle u \rangle = |\square|^{-1} \int_{\square} u(x) dx.$$

$L_p(\square)$, $W_p^1(\square)$, $p \geq 1$, – пространство Лебега и Соболева периодических функций. $W_2^{-1}(\square)$ – сопряженное $W_2^1(\square)$ пространство. Пространство, сопряженное с пространством $L_2(\square)$, отождествляется с $L_2(\square)$, что возможно в силу теоремы Рисса. $\rightarrow$ – знак слабой сходимости в соответствующем пространстве.

Как известно, если $g(x)$ ($x \in \mathbb{R}^2$) – периодическая функция, $g \in L_2(\square)$, $p \geq 1$, то тогда $g(\varepsilon^{-1}x) \rightarrow \langle g \rangle$ в пространстве $L_{p \text{ loc}}(Q)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где Q – произвольная ограниченная область плоскости.

$W_0(Q)$ – подпространство пространства $W_2^1(Q)$, элементы которого удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\operatorname{Re} u|_{\partial Q} = 0, \quad \int_Q \operatorname{Im} u \, dx = 0.$$

В случае, когда это не вызывает недоразумений, и уравнение, и оператора той или иной соответствующей краевой задачи обозначаем одним и тем же символом.

$y_j = \varepsilon^{-1}x_j$, $j = 1, 2$ – «быстрые» переменные. ∇, ∇_y – градиент; y в индексе означает, что производные берутся по переменным y_1, y_2 .

1. Формулировка результатов

В пунктах 1.1, 1.2 собраны нужные нам в дальнейшем известные результаты.

1.1. Задача Римана–Гильберта

1.2. Рассмотрим следующую задачу для системы двух уравнений Бельтрами:

$$\begin{cases} Au \equiv \partial_{\bar{z}} u + \mu \partial_z u = f \in L_2(Q), \\ u \in W_0(Q), \end{cases}$$

где коэффициент $\mu = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix}$ – ограниченная измеримая квадратная матрица, удовлетворяющая следующему условию:

$$\operatorname{vrai} \sup_{x \in Q} \|\mu(x)\| \leq k_0 < 1, \quad (1.2)$$

$k_0 > 0$ – постоянная (константа эллиптичности);

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, $\|\mu(x)\|$ – норма матрицы $\mu(x)$, которая рассматривается как оператор умножения в $\mathbb{C}^2$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Задача Римана–Гильберта (1.1) однозначно разрешима для любой правой части из $L_2(Q; \mathbb{C})$, причем имеют место априорные оценки:*

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q)}^2 \leq \operatorname{Re} \int_Q Au \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} u} dx,$$

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q)} \leq \|Au\|_{L_2(Q)} \leq (1 + k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q)},$$

где $Au \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} u}$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}^2$.

Теорема 1 доказывается аналогично скалярному случаю [4, 5, 7], поэтому мы опускаем доказательство.

Выражение

$$\|u\|_{W_0(Q)} = \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q)}, \quad u \in W_0(Q)$$

задает норму [4, 5, 7] в подпространстве $W_0(Q)$, эквивалентную норме исходного пространства $W_2^1(Q)$, поэтому справедливы следующие оценки:

$$c_1 \|u\|_{W_2^1(Q)} \leq \|Au\|_{L_2(Q)} \leq c_2 \|u\|_{W_2^1(Q)}, \quad (1.6)$$

где $c_1, c_2 > 0$ – постоянные, зависящие только от константы эллиптичности k_0 и области Q .

1.2. G-сходимость

Обозначим через $\mathcal{A}(k_0; Q)$ множество систем операторов Бельтрами (1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $\mathcal{A}(k_0; Q)$ называется *G-сходящейся* в области Q к оператору $A \in \mathcal{A}(k_0; Q)$ (обозначение: $A_k \xrightarrow{G} A$), если $A_k^{-1} \rightarrow A^{-1}$.

Это определение ввиду оценок (1.6) и компактности вложения $W_2^1(Q) \subset L_2(Q)$ эквивалентно следующему: последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $\mathcal{A}(k_0; Q)$ называется *G-сходящейся* в области Q к оператору $A \in \mathcal{A}(k_0; Q)$, если для любого $f \in L_2(Q)$ последовательность u_k решений системы уравнений Бельтрами $A_k u_k = f$, $u_k \in W_0(Q)$ сходится в $L_2(Q)$ к решению системы уравнений Бельтрами $Au = f$, $u \in W_0(Q)$. *G-предел* определен единственным образом. *G-сходимость* обладает следующим свойством *сходимости «произвольных» решений*: пусть $A_k \xrightarrow{G} A$, $u_k \rightarrow u$ в $W_2^1(Q)$, $f_k \rightarrow f$ в $L_2(Q)$, $A_k u_k = f_k$, тогда $Au = f$ (см. [4]).

1.3. Усреднение

Рассмотрим задачу Римана–Гильберта

$$\begin{cases} A_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \partial_{\bar{z}} u_\varepsilon + \mu^\varepsilon \partial_z u_\varepsilon = f \in L_2(Q), \\ u_\varepsilon \in W_0(Q), \end{cases} \quad (1.7)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\mu(x) = \mu(x_1, x_2)$, $\mu \in L_\infty(\square)$ – периодическая (периода T по каждой переменной) матрица с комплекснозначными элементами, которая удовлетворяет условию эллиптичности (1.2) на всей плоскости.

Заметим, что оператор A_ε принадлежит классу $\mathcal{A}(k_0; Q)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что семейство операторов $\{A_\varepsilon\}$ допускает усреднение, если $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A \in \mathcal{A}(k_0; Q)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В вопросах, связанных с усреднением, важную роль играет ядро оператора A^* , сопряженного с оператором следующей периодической задачи:

$$Au \equiv \partial_{\bar{z}} u + \mu \partial_z u = f \in L_2(\square), u \in W_2^1(\square). \quad (1.8)$$

Сформулируем необходимые нам в дальнейшем результаты по периодической задаче.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы следующие утверждения:*

- Для периодической задачи (1.8) имеет место «неравенство острого угла»

$$(1 - k_0) \langle |\partial_{\bar{z}} u|^2 \rangle \leq \operatorname{Re} \langle \mathcal{A} u \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} u} \rangle, u \in W_2^1(\square). \quad (1.9)$$

- Периодическая задача (1.8) является фредгольмовой.
- Сопряженный оператор $\mathcal{A}^*: L_2(\square) \rightarrow W_2^{-1}(\square)$ определяется следующей формулой:

$$-\mathcal{A}^* \mathcal{L} = \partial_z \mathcal{L} + \partial_{\bar{z}}(\mu^* \mathcal{L}), \mathcal{L} \in L_2(\square), \mathcal{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

где производные понимаются в смысле распределений, μ^* – сопряженная μ матрица, то есть матрица, полученная из матрицы μ транспонированием и переходом к комплексно-сопряженным элементам.

- Ядра $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^*, \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \mathbb{C}^2$ есть двумерные подпространства соответствующих пространств, причем один из базисов $\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix}, \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ ядра $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$ обладает следующим свойством: пусть $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$ – матрица со столбцами $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, тогда ее среднее значение есть единичная матрица $\langle \mathcal{P} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В основной своей части (за исключением утверждений о фредгольмовости и о ядре $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \mathbb{C}^2$) данная теорема доказана в работе [8]. Утверждение о ядре $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ следует из данного выше неравенства острого угла (1.9). Действительно, пусть $u \in W_2^1(\square)$ – решение однородной периодической задачи $\mathcal{A}u = 0$. Тогда из неравенства острого угла (1.9) следует, что $\partial_{\bar{z}} u = 0$. В силу свойства регулярности решений оператора Коши–Римана отсюда следует, что u – обычная аналитическая вектор-функция. Так как она еще и периодическая, то, согласно известной теореме Лиувилля, $u = \operatorname{const} \in \mathbb{C}^2$. Отсюда следует фредгольмовость, т. к. $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^* = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 2$. (Доказательство равенства $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^* = 2$ дано в [8].)

Справедлива

ТЕОРЕМА 3 (об усреднении). Для семейства операторов (1.7), $A_\varepsilon = \partial_{\bar{z}} + \mu^\varepsilon \partial_z$ имеет место усреднение, причем коэффициент усредненного оператора $A_0 = \partial_{\bar{z}} + \mu^0 \partial_z$ есть постоянная матрица, определенная следующим равенством:

$$\mu^0 = \langle \bar{\mathcal{P}} \mu \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \bar{p}_{11} & \bar{p}_{21} \\ \bar{p}_{12} & \bar{p}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (1.11)$$

где $\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix} = \mathcal{P}_1, \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \mathcal{P}_2$ – базисные векторы ядра $\mathcal{A}^*$ из теоремы 2.

1.4. Задача на ячейке

Для применения асимптотических методов при усреднении системы уравнений Бельтрами нам потребуются периодические решения следующей задачи на ячейке:

$$\begin{cases} \mathcal{A}N \equiv \partial_{\bar{z}} N + \mu \partial_z N = 2^{-1}(\mu^0 - \mu(x)), \\ N \in W_2^1(\square). \end{cases} \quad (1.12)$$

Здесь μ^0 – матрица коэффициентов усредненной системы (1.11).

ТЕОРЕМА 4 (о задаче на ячейке). Периодическая задача (1.12) разрешима и решения ее представляются в виде

$$N + c, \quad (1.13)$$

где $c \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ – произвольная квадратная матрица второго порядка с постоянными элементами, а N – квадратная матрица второго порядка, среднее значение которой равно нулю.

Более того, найдется число $p > 2$, зависящее только от постоянной эллиптичности k_0 , такое, что матрица-функция N принадлежит $W_p^1(\square)$, и для ее элементов N_{lj} имеют место неравенства

$$\|N_{lj}\|_{L_\infty(\square)} \leq c, \quad \|N_{lj}\|_{W_p^1(\square)} \leq c, \quad l, j = 1, 2, \quad (1.14)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 .

Действительно, для разрешимости (1.12), согласно теореме 2, необходимо и достаточно, чтобы матрица $2^{-1}(\mu^0 - \mu(x))$ была ортогональна базисным элементам $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ ядра $\text{Ker } \mathcal{A}^*$. Проверим это. Согласно (1.10), (1.11) мы имеем $2^{-1}\langle \bar{\mathcal{P}}(\mu^0 - \mu(x)) \rangle = 2^{-1}(\mu^0 - \langle \bar{\mathcal{P}}\mu \rangle) = 2^{-1}(\langle \bar{\mathcal{P}}\mu \rangle - \langle \bar{\mathcal{P}}\mu \rangle) = 0$. Отсюда следует, что периодическая задача (1.12) разрешима. Если $\tilde{N}$ – решение задачи (1.12), то и $N = \tilde{N} + c$, где c – постоянная матрица, также является решением этой задачи (1.12). Поэтому матрицу c можно подобрать так, чтобы среднее значение $\langle N \rangle = 0$.

Утверждения, касающиеся показателя повышенной суммируемости, можно найти в работе [8]. Теорема 4 доказана.

1.5. Оценки усреднения

Пусть в задаче (1.7) правая часть $f \in W_2^1(Q)$, а u_ε является решением системы уравнений Бельтрами (1.7). Как отмечалось в пункте 1.1, задача Римана–Гильберта (1.7) для системы уравнений Бельтрами однозначно разрешима. В качестве первого приближения к данному решению возьмем вектор-функцию

$$u_1^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon N(y) \partial_z u^0(x), \quad (1.15)$$

где $u^0 = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix}$ – решение усредненной системы $A_0 u^0 = f$, $u^0 \in W_0(Q)$; матрица $N(y)$ – периодическое решение задачи на ячейке (см. теорему 4); $y = \varepsilon^{-1}x$. При этом справедливо соотношение

$$A_\varepsilon u_1^\varepsilon = f + \varepsilon r_\varepsilon, \quad (1.16)$$

где $r_\varepsilon = N(y)(\partial_{zz}^2 u^0(x) + \mu(y)\partial_{zz}^2 u^0(x))$; $y = \varepsilon^{-1}x$.

Имеет место следующая

ЛЕММА 1.

- Усредненный оператор A_0 принадлежит классу $\mathcal{A}(k_0; Q)$.
- Пусть правая часть f системы уравнений Бельтрами (1.7) принадлежит пространству $W_2^1(Q)$ и область Q имеет гладкую (класса C^2) границу, тогда решение усредненной задачи $A_0 u^0 = f$, $u_0 \in W_0(Q)$ принадлежит пространству $W_0(Q) \cap W_2^2(Q)$, первое приближение u_1^ε принадлежит $W_2^1(Q)$ и $r_\varepsilon \in L_2(Q)$.

Сформулируем основное утверждение работы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть правая часть f системы уравнений Бельтрами (1.7) принадлежит пространству $W_2^1(Q)$, Q – односвязная область с гладкой (класса C^2) границей, тогда имеют место оценки

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q)} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{W_2^1(Q)}, \quad \|u_\varepsilon - u^0\|_{L_2(Q)} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{W_2^1(Q)}, \quad (1.17)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 из (1.2) и области Q .

Доказательства формул (1.17) и теоремы 5 см. в § 3.

2. Доказательство леммы 1

2.1. О некоторых оценках

Справедлива следующая

ЛЕММА 2. Пусть u^0 – произвольная функция из пространства $W_2^2(Q) \cap W_0(Q)$, а $f = A_0 u^0$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\|A_\varepsilon u_1^\varepsilon - A_0 u^0\|_{L_2(Q)} \leq c\varepsilon \|u^0\|_{W_2^2(Q)}, \|A_\varepsilon u_1^\varepsilon - A_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L_2(Q)} \leq c\varepsilon \|u^0\|_{W_2^2(Q)}, \quad (2.1)$$

$$\|u_1^\varepsilon - u^0\|_{L_2(Q)} \leq c\varepsilon \|u^0\|_{W_2^2(Q)}, u_1^\varepsilon \rightarrow u^0 \text{ в } W_2^1(Q) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

где $c = c(k_0) > 0$ – константа, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 ; u_ε есть решение задачи Римана–Гильберта для системы уравнений Бельтрами $A_\varepsilon u_\varepsilon = f$, $u_\varepsilon \in W_0(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду (1.16) имеем

$$A_\varepsilon(u_1^\varepsilon - u_\varepsilon) = \varepsilon r_\varepsilon, \quad (2.3)$$

где $r_\varepsilon = N(y)(\partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 u^0(x) + \mu(y)\partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 u^0(x))$.

Согласно теореме 4 матрица $N(y)$ ограничена постоянной, зависящей только от постоянной эллиптичности k_0 , поэтому $r_\varepsilon \in L_2(Q)$. Отсюда и из (1.16), (2.3) с учетом $A_\varepsilon u_\varepsilon = f = A_0 u^0$ получим оба неравенства (2.1).

Докажем второе соотношение из (2.2). Первое следует из (1.15), из (1.15) вытекает:

$$\nabla u_1^\varepsilon = \nabla u^0 + \nabla_y N \partial_z u^0(x) + \varepsilon N(y) \nabla \partial_z u^0(x) = \nabla u^0 + (\nabla_y N + \varepsilon N(y)) \nabla \partial_z u^0(x).$$

Отсюда и из (1.15), учитывая свойство среднего значения $(\nabla N(\varepsilon^{-1}x) \rightarrow \langle \nabla N \rangle = 0$ в $L_2(Q)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$), получим $u_1^\varepsilon \rightarrow u^0$ в $W_2^1(Q)$. Лемма доказана.

2.2. Доказательство леммы 1

Покажем, что оператор $A_0 = \partial_{\bar{z}} + \mu^0 \partial_z$ принадлежит классу $\mathcal{A}(k_0; Q)$. Пусть $\hat{A}$ является произвольной, предельной точкой семейства $\{A_\varepsilon\}$ (напомним, что класс $\mathcal{A}(k_0; Q)$ является компактным и семейство $\{A_\varepsilon\}$ – подмножество $\mathcal{A}(k_0; Q)$), т. е.

$$A_{\varepsilon_k} \xrightarrow{G} \hat{A} \text{ в области } Q \text{ при } \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

где $\{\varepsilon_k\} \subset \{\varepsilon\}$. Пусть $u^0 \in C^2(\bar{Q}) \cap W_0(Q)$, $f = A_0 u^0$. Тогда отсюда из (2.3) леммы 2 и $A_\varepsilon u_\varepsilon = f = A_0 u^0$ имеем:

$$A_{\varepsilon_k} u_1^{\varepsilon_k} = f + \alpha_{\varepsilon_k}, \quad (2.5)$$

$\alpha_{\varepsilon_k} = o(\varepsilon_k)$ в $L_2(Q)$ при $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Ввиду (2.2) мы получим

$$u_1^{\varepsilon_k} \rightarrow u^0 \text{ в } W_2^1(Q) \text{ при } \varepsilon_k \rightarrow 0.$$

Из (2.4) и (2.5) с учетом свойства сходимости произвольных решений (см. п. 1.2) получим $\hat{A} u^0 = f$. Поэтому имеем $A_0 u^0 = \hat{A} u^0$ для любой вектор-функции $u^0 \in C^2(\bar{Q}) \cap W_0(Q)$. Следовательно, $A_0 = \hat{A} \in \mathcal{A}(k_0; Q)$ ввиду всюду плотности множества $C^2(\bar{Q}) \cap W_0(Q)$ в $W_0(Q)$.

Итак, оператор A_0 является эллиптическим из класса $\mathcal{A}(k_0; Q)$. Пусть u^0 – решение системы уравнений Бельтрами $A_0 u^0 = f \in W_2^1(Q)$, $u^0 \in W_0(Q)$. В силу свойств регулярности решений эллиптических задач [9] это решение u^0 принадлежит пространству $W_2^2(Q)$. Аналогично лемме 2 отсюда получим остальные утверждения. Лемма 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 5

В доказательстве теоремы нам потребуется оценка интеграла по приграничной полосе области Q , которую будем обозначать через Q_ε , где ε – ширина полосы.

Приведем данную оценку.

Пусть граница ∂Q области Q принадлежит классу C^1 , тогда $\forall u \in W_2^1(Q)$ для достаточно малых ε с любым показателем $q > 1$ справедлива следующая оценка:

$$\|u\|_{L_q(Q_\varepsilon; \mathbb{C})} \leq c \sqrt[q]{\varepsilon} \|u\|_{W_2^1(Q)}, \quad (3.1)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от ε и u .

Действительно, для следа функции из пространства $W_2^1(Q)$ на гладкой (класса C^1) кривой Γ имеет место оценка

$$\|u\|_{L_q(\Gamma)} \leq c(\Gamma) \|u\|_{W_2^1(Q)},$$

где $c(\Gamma) > 0$ – норма оператора вложения $W_2^1(Q) \subset L_q(\Gamma)$ с любым показателем $q > 1$. Причем при малых гладких деформациях гладкой кривой Γ нормы операторов вложения равномерно ограничены [10; гл. 2, § 2]. Отсюда легко следует оценка (3.1). Отметим, что при $q = 2$ оценку (3.1) можно найти в [11; гл. 1, § 1].

Теперь приступим к доказательству оценки разности между точным решением u_ε задачи Римана–Гильберта (1.7) и первым приближением (1.15) u_1^ε .

Пусть u^0 – решение усредненной задачи Римана–Гильберта для усредненного уравнения из теоремы 3 и пусть $u^0 \in W_2^2(Q) \cap W_0(Q)$. Для того чтобы обеспечить такую гладкость u^0 [15], нам достаточно взять в задаче Римана–Гильберта правую часть f как для усредненного уравнения, так и для исходного уравнения (1.7) из пространства $W_2^1(Q)$.

Первое приближение (1.15) u_1^ε не принадлежит пространству $W_0(Q)$. Это вызывает некоторые затруднения при оценке разности $u_\varepsilon - u_1^\varepsilon$. Чтобы обойти их, введем в рассмотрение семейство функций

$$\theta^\varepsilon(x) = \omega(\varepsilon^{-1} \rho(x, \partial Q)), \quad (3.2)$$

где $\rho(x, \partial Q)$ – расстояние от x до ∂Q ,

$$\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{если } t > 1. \end{cases}$$

Легко заметить, что семейство функций $\theta^\varepsilon(x)$ обладает следующими свойствами:

- 1°. $0 \leq \theta^\varepsilon(x) \leq 1$; $\theta^\varepsilon = 1$ вне ε – окрестности границы области Q ;
- 2°. $\varepsilon |\nabla \theta^\varepsilon| \leq c$ в Q , причем константа c не зависит от ε ;
- 3°. $\theta^\varepsilon = 0$ на границе области Q .

Подправим первое приближение формулой

$$w_1^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon \theta^\varepsilon(x) (N(y) \partial_z u^0(x)) - i \varepsilon |Q|^{-1} c_\varepsilon, \quad (3.3)$$

где $|Q|$ – площадь области Q ; N – периодическое решение из теоремы 4; $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ – действительное число, определенное формулой

$$c_\varepsilon = \int_Q \operatorname{Im}(\theta^\varepsilon(x) N(y) \partial_z u^0(x)) dx.$$

Очевидно, что семейство c_ε равномерно ограничено по ε и ввиду (1.14) имеем

$$|c_\varepsilon| \leq c \|u^0\|_{W_2^2(Q)}, \quad (3.3')$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 .

Так как $u^0 \in W_2^2(Q) \cap W_0(Q)$, согласно (3.3) и свойству 3° семейства (3.2) получим $w_1^\varepsilon(x) \in W_0(Q)$.

Подправленное первое приближение (3.3) можно представить в следующем виде:

$$w_1^\varepsilon(x) = u_1^\varepsilon(x) - \varepsilon(1 - \theta^\varepsilon(x))N(y)\partial_z u^0(x) - i\varepsilon|Q|^{-1}c_\varepsilon.$$

Оценим разность

$$u_1^\varepsilon(x) - w_1^\varepsilon(x) = \varepsilon(1 - \theta^\varepsilon(x))N(y)\partial_z u^0(x) + i\varepsilon|Q|^{-1}c_\varepsilon. \quad (3.4)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \nabla(u_1^\varepsilon(x) - w_1^\varepsilon(x)) &= -\varepsilon\nabla\theta^\varepsilon(x)N(y)\partial_z u^0(x) + \varepsilon(1 - \theta^\varepsilon(x))\nabla_y N(y)\partial_z u^0(x) + \\ &+ \varepsilon(1 - \theta^\varepsilon(x))N(y)\partial_z u^0(x) \equiv \mathfrak{U}_1^\varepsilon + \mathfrak{U}_2^\varepsilon + \mathfrak{U}_3^\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.4')$$

Здесь каждое слагаемое справа, согласно свойству 1° функции θ^ε , равно нулю вне ε – окрестности границы. Учитывая свойство 2° функции θ^ε , отсюда с учетом (3.1) легко получим

$$\|\mathfrak{U}_1^\varepsilon\|_{L_2(Q)} \leq c \left(\int_{Q_\varepsilon} |\partial_z u^0(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|u^0\|_{W_2^2(Q)}, \quad (3.5)$$

$$\|\mathfrak{U}_3^\varepsilon\|_{L_2(Q)} \leq c\varepsilon\|u^0\|_{W_2^2(Q)}, \quad (3.6)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от ε и u^0 .

Теперь оценим $\|\mathfrak{U}_2^\varepsilon\|_{L_2(Q)}$. Согласно (3.3), (1.14) и неравенству Гельдера с показателями $\frac{p}{2}, \frac{p}{p-2}$, где $p > 2$ есть показатель повышенной суммируемости, имеем

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{U}_2^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} &\leq 2 \sum_{j=1}^2 \left(\int_{Q_\varepsilon} |\nabla_y N(y)|^2 |\partial_z u^0|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^2 \left(\int_{Q_\varepsilon} |\nabla_y N(y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_\varepsilon} |\partial_z u^0|^{\frac{2p}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{2p}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ввиду гладкости границы ∂Q ее можно покрыть кругами радиуса $2\varepsilon T$ с центрами на границе ∂Q таким образом, чтобы эти круги накрыли замыкание граничной полосы $\overline{Q}_\varepsilon$ и чтобы длины дуг между центрами соседних кругов были равными εT (кроме одной возможной, длина которой меньше εT). Погрузим далее каждый круг в квадрат со сторонами, параллельными осям координат, и длинами сторон $4\varepsilon T$. В результате получим покрытие приграничной полосы Q_ε квадратами $\square_{4\varepsilon T}$ в количестве, равном целой части $\left[\frac{L}{T\varepsilon}\right]$, где L есть длина границы ∂Q . Это эквивалентно покрытию $\overline{Q}_\varepsilon$ квадратами $\square_{\varepsilon T}$ в количестве $16\left[\frac{L}{T\varepsilon}\right]$. С учетом периодичности N и приведенной процедуры покрытия имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_\varepsilon} |\nabla_y N(y)|^p dx \right) &\leq 16 \left[\frac{L}{T\varepsilon}\right] \int_{\square_{\varepsilon T}} |\nabla_y N(y)|^p dx = \\ &= 16 \left[\frac{L}{T\varepsilon}\right] \varepsilon^2 \int_{\square} |\nabla_y N(y)|^p dy \leq 16 \left(\frac{L}{T} + 1\right) \varepsilon \|\nabla N\|_{L_p(\square)}^p, \quad y = \varepsilon^{-1}x. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.13) получим

$$\left(\int_{Q_\varepsilon} |\nabla_y N(y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c\varepsilon^{\frac{1}{p}}, \quad (3.8)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0, T и ∂Q .

Второй интеграл справа в (3.7) оценим, используя (3.1), где $q = \frac{2p}{p-2}$, $u = \partial_z u^0$.

Имеем

$$\left(\int_{Q_\varepsilon} |\partial_z u^0|^{\frac{2p}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{2p}} \leq c \varepsilon^{\frac{p-2}{2p}} \|u^0\|_{W_2^2(Q)}. \quad (3.9)$$

Из (3.9), (3.8) и (3.7) вытекает

$$\|\mathfrak{U}_2^\varepsilon\|_{L_2(Q)} \leq c \sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{W_2^2(Q)}, \quad (3.10)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от ε и u^0 .

Из оценок (3.5), (3.6), (3.10) ввиду (3.4') следует:

$$\|\nabla(u_1^\varepsilon(x) - w_1^\varepsilon(x))\|_{L_2(Q)} \leq c \sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{W_2^2(Q)}, \quad (3.11)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от ε и u^0 . Кроме того, из (3.4), свойства 1° функции θ^ε и (3.3') следует оценка:

$$\|u_1^\varepsilon(x) - w_1^\varepsilon(x)\|_{L_2(Q)} \leq c \varepsilon \|u^0\|_{W_2^2(Q)}. \quad (3.12)$$

Из оценок (3.11), (3.12) мы имеем:

$$\|u_1^\varepsilon(x) - w_1^\varepsilon(x)\|_{W_2^1(Q)} \leq c \sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{W_2^2(Q)}, \quad (3.13)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от ε и u^0 .

Теперь найдем L_2 -оценку $f_\varepsilon := A_\varepsilon(u_\varepsilon - w_1^\varepsilon)$. Согласно (1.16) имеем

$$f_\varepsilon = A_\varepsilon(u_\varepsilon - u_1^\varepsilon) + A_\varepsilon(u_1^\varepsilon - w_1^\varepsilon) = -\varepsilon r_\varepsilon + \partial_{\bar{z}}(u_1^\varepsilon - w_1^\varepsilon) + \mu(y) \partial_z(u_1^\varepsilon - w_1^\varepsilon).$$

Отсюда и из L_2 -оценок производных (3.11), учитывая (1.6), (2.3), получим следующую оценку:

$$\|f_\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq \|A_\varepsilon(u_\varepsilon - u_1^\varepsilon)\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} + \|A_\varepsilon(u_1^\varepsilon - w_1^\varepsilon)\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c \sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})} \quad (3.14)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от ε и u^0 .

Заметим, что разность $u_\varepsilon - w_1^\varepsilon$ является решением задачи Римана–Гильберта: $\partial_{\bar{z}} u + \mu(\varepsilon^{-1}x) \partial_z u = f_\varepsilon, u \in W_0(Q)$, и оно принадлежит пространству $W_0(Q)$. Поэтому из оценок (3.14), (1.6) получим

$$\|u_\varepsilon - w_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q)} \leq c \sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{W_2^2(Q)}. \quad (3.15)$$

Из оценок (3.13), (3.15) вытекает оценка разности между точным решением и первым приближением $u_\varepsilon - u_1^\varepsilon$:

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q)} \leq c \sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{W_2^2(Q)} \quad (3.16)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от ε и u^0 . Отсюда из оценки (3.13) и из леммы 2 получим следующую оценку:

$$\|u_\varepsilon - u^0\|_{L_2(Q)} \leq c \sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{W_2^2(Q)} \quad (3.17)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от ε .

u^0 – решение усредненной эллиптической задачи с постоянными коэффициентами. Поэтому согласно эллиптическим оценкам [10] получим: $\|u^0\|_{W_2^2(Q)} \leq c \|f\|_{W_2^1(Q)}$ с постоянной $c > 0$, не зависящей от $f \in W_2^1(Q)$. Следовательно, из оценок (3.16), (3.17) вытекают оценки (1.17). Теорема 5 доказана.

Литература

1. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения // Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15, № 5. – С. 1–108.
2. Жиков В.В. Об операторных оценках в теории усреднения // Доклады РАН. – 2005. – Т. 403, № 3. – С. 305–308.
3. Жиков В.В., Пастухова С.Е. Об операторных оценках в теории усреднения // Успехи математических наук. – 2016. – Т. 71, № 3. – С. 27–122.
4. Сиражудинов М.М. О G-сходимости систем обобщенных операторов Бельтрами // Математический сборник. – 2008. – Т. 199, № 5. – С. 124–155.

5. Сиражудинов М.М., Сиражудинов Р.М. О G-сходимости систем обобщенных операторов Бельтрами // Труды МИАН. – 2008. – Т. 121. – С. 268–276.
6. Сиражудинов М.М. О G-компактности одного класса эллиптических систем первого порядка // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 298–305.
7. Сиражудинов М.М. О краевой задаче Римана–Гильберта // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 1. – С. 64–73.
8. Сиражудинов М.М. О периодических решениях одной эллиптической системы первого порядка // Математические заметки. – 1990. – Т. 48, № 5. – С. 153–155.
9. Солонников В.А. Об обобщенных краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дуглиса – Л. Ниренберга. II // Труды МИАН СССР. – 1966. – Т. 92. – С. 233–297.
10. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1964.
11. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – М.: Высшая школа, 1987.

Поступила в редакцию 9 ноября 2019 г.

UDC 517.956.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-1-43–52

Error Estimates for the Averaging of the Riemann–Hilbert Problem for a System of Two Beltrami Equations

M.M. Sirazhudinov^{1,3}, S.V. Tikhomirova², S.P. Jamaludinova¹

¹ Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; sirazhmagomed@yandex.ru, dzh-saida2012@yandex.ru;

² Vladimir State University named after A.G. and N.G. Centennial; 600000, Vladimir, Gorky st., 87; tiho.mirno.svetlo@mail.ru;

³ Dagestan Federal Research Center RAS; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 45

When compiling mathematical models of highly non-homogeneous medium, their local characteristics are usually described by functions of the form $a(\varepsilon^{-1}x)$, where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, while the function $a(x)$ has an ordered structure (it is periodic, almost periodic, the implementation of a homogeneous random field, etc.). Consequently, the corresponding mathematical models are differential equations with rapidly oscillating coefficients. Due to the rapid oscillation of the coefficients, such equations cannot be solved, even using modern supercomputers. Therefore, in the physical literature, such media are replaced by so-called effective media, that is, media with constant physical characteristics. In mathematical terms, this replacement means the transition from the original equation with rapidly oscillating coefficients to the equation with constant coefficients, in other words, to the homogenized equation. The given paper studies the issues related to homogenization and subsequent estimation of the error of homogenization the Riemann-Hilbert problem for a system of two Beltrami equations with rapidly oscillation ε -periodic coefficients. Estimates of the homogenization error in Lebesgue and Sobolev spaces of order $\sqrt{\varepsilon}$ are obtained.

Keywords: *Beltrami equation, homogenization.*

Received 9 November 2019