УДК 517 956

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-1-35–42

Б. Шарипов

Об одном классе нелинейной обобщённой системы Коши–Римана с сингулярными коэффициентами

Таджикский государственный финансово-экономический университет; Республика Таджикистан, 734055, г. Душанбе, ул. Нахимова, 64/14; boboali.sharipov@ mail.ru

В работе рассматривается один класс переопределённых обобщённых систем Коши–Римана, для которых условия совместности выполняются тождественно и многообразие их решений находится явно. Для них исследуется поведение решений систем в особых точках данной области.

Ключевые слова: *особые точки, совместность системы, обобщённая система Коши–Римана, сингулярные или особые точки, многообразие решений.*

В работе введём некоторые обозначения: A – класс аналитических функций по комплексным независимым переменным; RA – класс вещественно-аналитических функций, то есть функции этого класса в окрестности каждой точки области могут быть представлены абсолютно сходящимися двойными степенными рядами.

В работах И.Н. Векуа [1, 2], Л.Г. Михайлова [3–7] и других авторов были изучены обобщённые системы Коши–Римана (о. с. К.–Р.) с одной неизвестной функцией W от двух и многих независимых комплексных переменных вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar z} = f(z,\bar z;W), \quad \text{а также} \quad \frac{\partial W}{\partial \bar z_k} = f_k(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2;W), \quad (k=\overline{1,2}), \tag{1}$$

где $f(\mathrm{z},\bar{\mathrm{z}};\mathrm{W})\in C^1(\overline{D})$, и $f_k(\mathrm{z}_1,\bar{\mathrm{z}}_1,\mathrm{z}_2,\bar{\mathrm{z}}_2;\mathrm{W})\in RA(\overline{\Pi}_k), W\in RA(\overline{\Pi}_{k+1})$, $(k=1,2)$, $z_k=x_k+i\,y_k$, $f_k(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2;W)\in A(\overline{\Pi}_\mathrm{k})$, $f_1=f(z,...)$, т. е. $\partial_{\overline{W}} f_k=0$,

$$\frac{\partial}{\partial \bar z_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}+i\frac{\partial}{\partial y_k}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-i\frac{\partial}{\partial y_k}\right), \overline{\Pi}_{k+1}=\left\{z\left|\ \left|\bar z_k-\bar z_k^{(0)}\right|\le a,\ |W|\le b\right.\right\}, \mathrm{k}=(1,\,2).$$

Если условие совместности в о. с. К.–Р. (1) выполняется тождественно, тогда найдётся регулярное многообразие решений (1), выражаемое через произвольные аналитические функции либо $\Phi(z_1,z_2)$ [1–10]. Областью $\overline{\Gamma}_2$ считаем полицилиндром $\overline{\Pi}_2=\{|\mathrm{z}|\le a,|W|\le b\}$. В работах [3–11] было доказано, что, если даются системы типа (1) с сингулярными точками, можно проверить следующее необходимое условие: при ограниченности производных $\partial_{\bar z}W$ в о. с. К.–Р $\bar z\cdot\partial_{\bar z}W = f(z,\bar z)$ и при существовании предела $\lim\limits_{\bar z\to 0}\left(\bar z\cdot\partial_{\bar z}W\right)=0$ необходимо следует, что $f(0,0)=f_0=0,\ W(z,\bar z)=C.$ Таким образом, не решая о. с. К.–Р. (1), можно определить поведение решения задачи формулой $W=f(z,\bar z)$ в точке вырождения $\bar{\mathrm{z}}=0$.

В настоящей работе рассматривается один класс нелинейных переопределённых обобщённых систем Коши–Римана (п. о. с. К.–Р.) в классе (RA) – вещественно аналитических функций с сингулярными коэффициентами, для которых с учетом класса функции в данной системе устанавливается тождественное выполнение условия совместности, а многообразие ее решений находится явно. Иначе говоря, нами будут рассмотрены классы систем, для которых либо в данной системе сингулярная точка устраняется и многообразие решений системы во всей области будет непрерывным, либо одна (из двух) сингулярная точка устраняется, а вторая остаётся в системе. Кроме того, исследуется поведение решений систем в точках вырождения области.

1. В настоящей работе рассматривается вырождающееся п. о. с. К.–Р.

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{\bar{z}_1}, \tag{2}$$

где $f, g \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_3^{(0)}), \quad f, g -$ аналитические по переменной W.

Наши цели – обеспечение тождественного выполнения условий совместности п. о. с. К.–Р. вида (2), а также нахождение непрерывного либо сингулярного многообразия решений систем. По этой причине для существования непрерывного решения системы (2) по аналогии с [6] требуются ограниченность производной неизвестной функции по переменной $\bar{z}_1$ и выполнение следующих условий**:**

$$\lim_{\bar{z}_1 \to 0} \left(\bar{z}_1 \cdot \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} \right) = 0, \ (k = 1,2). \tag{3}$$

Тогда из системы (2) необходимо имеем $f(z_1, 0, z_2, \bar{z}_2; W) = 0$, $g(z_1, 0, z_2, \bar{z}_2; W) = 0$. Из этих двух соотношений имеем функции $W = h_i(z_1, z_2, \bar{z}_2), (i = 1,2)$, непрерывные на данной области. Возможно, эти функции будут частными либо особыми решениями данной системы. Выполняя аналитическое продолжение функций комплексных переменных $\bar{z}_k$ на $\varsigma_k \ (k = 1,2)$, преобразуем систему (2) в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = f(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \frac{g(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W)}{\varsigma_1}. \tag{4}$$

Условием совместности этой системы будет

$$\varsigma_1^2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \varsigma_2} - \frac{\partial g}{\partial \varsigma_1} \right) + \varsigma_1 \cdot \left(g \cdot \frac{\partial f}{\partial W} - f \cdot \frac{\partial g}{\partial W} \right) + g = 0. \tag{5}$$

Пусть условие (5) выполняется, но не тождественно. Тогда из этого соотношения по аналогии с теоремой о неявной функции [9–12] имеем функцию $W = h(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)$. Если найденная функция удовлетворяет каждое уравнение системы (4), то оно будет частным либо особым решением системы. В противном случае системы (4) и (2) не будут совместными.

Допустим, что условие (5) выполняется тождественно. Необходимое условие совместности системы (4) очевидно. Будем доказывать достаточное условие совместности системы (4). Проинтегрировав первое уравнение системы (4) по переменной ς_1 как регулярной п. о. с. К.–Р., считая остальные переменные параметрами, имеем:

$$W = F[z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; V(z_1, z_2, \varsigma_2)]. \tag{6}$$

Дифференцируя последнюю функцию из (6) по переменной ς_2, подставим её значения во второе уравнение системы (4) и получим регулярное комплексное дифференциальное уравнение (к. д. у.) вида

$$\frac{\partial V}{\partial \varsigma_2} = H(z_1, z_2, \varsigma_2; V), \quad \left(H(z_1, ...) = \frac{g - \varsigma_1 F'_{\varsigma_2}}{\varsigma_1 F'_V} \right). \tag{7}$$

Далее доказываем, что правая часть к. д. у. (7) не зависит от переменной ς_1. Для этого продифференцируем правую часть к. д. у. (7) по переменной ς_1:

$$D_{\varsigma_1}\left(\frac{g - \varsigma_1 F'_{\varsigma_2}}{\varsigma_1 F'_V} \right) = 0: \quad \frac{(g - \varsigma_1 F'_{\varsigma_2})'_{\varsigma_1} \cdot \varsigma_1 \cdot F'_V - (g - \varsigma_1 F'_{\varsigma_2}) \cdot (\varsigma_1 \cdot F'_V)'_{\varsigma_1}}{(\varsigma_1 \cdot F'_V)^2} = 0.$$

Преобразовав это соотношение, в числителе последней дроби получим

$$[\varsigma_1^2 \cdot (f'_{\varsigma_2} - g'_{\varsigma_1}) + \varsigma_1 \cdot (g \cdot f'_W - f \cdot g'_W) + g] \cdot \varsigma_1 \cdot F'_V - (g - \varsigma_1 \cdot F'_{\varsigma_2}) \cdot (\varsigma_1 \cdot F'_V)'_{\varsigma_1} = 0.$$

Поскольку по первому предположению условие (5) выполняется тождественно, каждые слагаемые в скобках равны нулю. Это означает, что правая часть к. д. у. (7) не зависит от независимой переменной ς_1. Тогда в результате интегрирования регулярного нелинейного к. д. у. (7) методом последовательных приближений имеем $V = V[z_1, z_2, \varsigma_2; \Phi(z_1, z_2)]$.

Далее, подставляя значение V в (3) и переходя к прежним переменным, будем иметь

$$W(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = F\big[z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2 V[z_1, z_2, \bar{z}_2; \Phi(z_1, z_2)]\big]. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть в п. о .с. К.–Р. (2)* $f, g \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_3^{(0)}), f, g -$ *аналитические по переменной W. Если для системы (2) имеет место условие (3), а также условие (5) выполняется, но не тождественно, то находятся некоторые особые либо частные решения системы (2), непрерывные в области. Если условие (5) выполняется тождественно по всем переменным, тогда исходная система (2) также разрешима, и многообразие её решений определяется формулой (8), непрерывной всюду в области* $\overline{\Pi}_2$. *При этом ее особенность устраняется.*

Замечание. 1. Если рассматривать п. о. с. К.–Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{(\bar{z}_1)^{\mathrm{n}}}, \ (n \geq 2) \tag{9}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{(\bar{z}_2)^n}, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W), \ (n \geq 2), \tag{10}$$

и для указанных п. о. с. К.–Р. условие совместности вида (4) будет выполнено тождественно, то в этих системах (9), (10) устраняются их особенности и будут справедливыми утверждения, равносильные предыдущей теореме 1.

Замечание. 2. Если в п. о. с. К.–Р. (2) функция $f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)$ определяется как некоторые функции класса RA, например, вида:

1) $f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W) = a(\mathrm{z}_1, \bar{\mathrm{z}}_1, \mathrm{z}_2, \bar{\mathrm{z}}_2) \cdot p(\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \bar{\mathrm{z}}_2; \mathrm{W})$ либо

2) $f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W) = a(\mathrm{z}_1, \bar{\mathrm{z}}_1, \mathrm{z}_2, \bar{\mathrm{z}}_2) \cdot W + \mathrm{b}(\mathrm{z}_1, \bar{\mathrm{z}}_1, \mathrm{z}_2, \bar{\mathrm{z}}_2) \cdot \mathrm{W}^{\mathrm{n}}$, либо

3) $f(z_1, t\cdot\bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{z}_1\cdot W) = \tilde{f}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)$, либо

4) $f(z_1, t\cdot\bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; t^k\cdot W) = t^{1-k}\cdot\tilde{f}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W), \quad (k \geq 1)$ (случаи однородной либо обобщённо-однородной функции $f(\cdot)$ и другие нелинейные и линейные случаи для функции $f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)$, то в п. о. с. К.–Р. вида (2) и (9) функция $g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)$ найдутся решения определёнными формулами, так, что для них условия совместности вида (10), во-первых, выполняются тождественно, во-вторых, особенности (независимо от их порядка) в новых преобразованных системах частично устраняются, и многообразие их решений найдется определёнными видами (непрерывными) функций. Например, в первом случае функция $g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)$ (необходима и достаточна) должна иметь вид:

$$g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W) = \bar{z}_1^n \left\{ \frac{\partial(\grave{A} - \grave{I}\ )}{\partial \bar{z}_1} + F\left[z_1, \bar{z}_1, z_2; P(z_1, z_2, z_2; W) - A(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)\right] \right\} p(z_1, z_2, \bar{z}_2; W),$$

где функции $A(z_1, \ldots)$, $P(z_1, \ldots)$ выражаются через функции интегралов от $a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$ до $p(z_1, z_2, \bar{z}_2; W)$, а решение системы определяется формулой:

$$W = P^{-1}\left\{z_1, z_2, \bar{z}_2; A(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + H\left[z_1, \bar{z}_1, z_2; \Phi(z_1, z_2)\right]\right\},$$

причём найденные решения изучаемых систем во всей данной области будут непрерывными (но, возможно, многозначными).

2. Теперь рассмотрим п. о. с. К.–Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{(\bar{z}_1)^m}, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{(\bar{z}_2)^m}, \tag{11}$$

где $f, g \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_3^{(0)}), m \geq 0, f, g -$ аналитические по переменной W. Аналогично предыдущим пунктам в системе (11), аналитически продолжив функции по переменной $\bar{z}_k$ на ς_k $(k = 1,2)$, преобразуем её в следующем виде:

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \frac{f(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W)}{(\varsigma_1)^m}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \frac{g(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W)}{(\varsigma_2)^m}. \tag{12}$$

Если в системе (12) при ограниченности $\dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_k}$ $(k = 1,2)$ существуют пределы

$$\lim_{\varsigma_k \to \varsigma_k^{(0)}} \left(\varsigma_k^m \cdot \frac{\partial W}{\partial \varsigma_k} \right) = 0, (k = 1, 2), \tag{13}$$

то из равенства $f(z_1, \ldots; W) = 0, g(z_1, \ldots; W) = 0$ найдём функции $W = h_i(z_1, z_2), (i = 1,2)$ – аналитические и непрерывные во всем полицилиндре, являющиеся частными решениями данной системы. Условием совместности системы (12) будет

$$\varsigma_2{}^m \frac{\partial f}{\partial \varsigma_2} + g\frac{\partial f}{\partial W} - \varsigma_1{}^m \frac{\partial g}{\partial \varsigma_1} - f\frac{\partial g}{\partial W} = 0. \tag{14}$$

Если условие (14) выполняется, но не тождественно, то из него находим некоторую функцию $u = h(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)$, которая, возможно, будет частным решением исходной системы.

Теперь приступим к интегрированию системы (12) (вне особой точки). Допустим, что решением первого уравнения системы (12) будет функция $W = F\left[z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; V(z_1, z_2, \varsigma_2,)\right]$ (непрерывное по переменной ς_2, имеющее особенности (m – 1)-того порядка, по переменной ς_1 в точке $\varsigma_1 = 0$), т. е. $W = F\left[z_1, \varsigma_1^{1-m}, z_2, \varsigma_2; V(z_1, z_2, \varsigma_2,)\right]$. Дифференцируя последнюю функцию по переменной ς_2, подставим её результат в систему (12). Тогда получим к. д. у. с сингулярной точкой вида

$$\frac{\partial V}{\partial \varsigma_2} = \frac{p(z_1, z_2, \varsigma_2; V)}{\varsigma_2{}^m}, \quad \left(p(z_1, z_2, \varsigma_2; V) = \frac{g - \varsigma_2{}^m \cdot F'_{\varsigma_2}}{F'_V}, (F'_V \neq 0) \right). \tag{15}$$

Если для последнего уравнения из (15) выполняется условие (3), то есть $\lim\limits_{\varsigma_2 \to \varsigma_2^{(0)}} \left(\varsigma_2{}^m \cdot \frac{\partial V}{\partial \varsigma_2} \right) = 0$ (при ограниченности $\frac{\partial V}{\partial \varsigma_2}$), из (15) имеем $p(z_1, z_2, 0; V) = 0$, решением которого будет некоторая аналитическая функция $V = \mathrm{h}(z_1, z_2)$. А эта функция считается частным решением к. д. у. (15) и самой системы (12). Если в к. д. у. (15) $p(z_1, z_2, \varsigma_2; V) = o(\varsigma_2{}^{m-\lambda}), (m - 1 \leq \lambda < m)$, то в к. д. у. (15), в данной области имеет непрерывное решение. Если же это условие малости для функции $p(z_1, z_2, \varsigma_2; V)$ не выполняется, то решение к. д. у. (15) и системы (12) в $\Pi_3^{(0)} = \overline{\Pi} - \left\{\varsigma_k^{(0)} = 0\right\}$ непрерывно, а в точках $\varsigma_k = 0, (k = 1, 2)$ имеет особенности (m – 1)-того порядка по обеим переменным и будет представлено формулой:

$$W(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = F\left[z_1, \bar{z}_1^{1-m}, z_2, \bar{z}_2; V\left[z_1, z_2, \bar{z}_2^{1-m}; \Phi(z_1, z_2)\right]\right]. \tag{16}$$

Теорема 2. *Пусть в п. о. с. К.–Р. (12)* $f, g \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_3^{(0)}), f, g -$ *аналитические по переменной W. Если в системе (12) будут выполнены условия (3) и условие совместности данной системы выполняется, но не тождественно, то система (12) имеет некоторые частные решения. А также если в к. д. у. (15) выполняется условие (3), то и к. д. у. (15), и система (12) будут иметь только лишь некоторое частное решение. Если условие совместности данной системы (12) выполняется тождественно, тогда п. о. с. К.–Р. (11) вне точки вырождения разрешимы, и многообразие её решений определяется формулой (16). При этом решение системы (11) по обеим переменным (причём многозначно) имеет особенности (m – 1)-го порядка (при m > 1) и логарифмическую при m = 1, а в случае m < 1оно непрерывно.*

3. Теперь рассмотрим п. о. с. К.–Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{\bar{z}_2}, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{\bar{z}_1},$$

где $f, g \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_3^{(0)}),\ f, g -$ аналитические по переменной *W*.

Аналогично пунктам в предыдущей системе, аналитически продолжив переменную $\bar{z}_k$ на ς_k $(k = 1,2)$, преобразуем её в следующем виде:

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \frac{f(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W)}{\varsigma_2}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \frac{g(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W)}{\varsigma_1}. \tag{17}$$

Условие совместности системы (17) имеет вид:

$$\varsigma_1 \cdot \varsigma_2 \cdot \left(\varsigma_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial \varsigma_2} - \varsigma_2 \cdot \frac{\partial g}{\partial \varsigma_1} + g \cdot \frac{\partial f}{\partial W} - f \cdot \frac{\partial g}{\partial W} \right) + \varsigma_2^2 \cdot g - \varsigma_1^2 \cdot f = 0 . \quad (18)$$

Если условие совместности (18) выполняется, но не тождественно, то из этого соотношения по аналогии с предыдущим пунктом получим некоторое частное решение системы (17). Пусть условие (18) выполняется тождественно. Интегрируя первое уравнение системы (17) по переменной ς_1 (методом последовательных приближений), считая ς_2 параметром, будем иметь

$$\mathrm{W} = \frac{1}{\varsigma_2} \cdot F[z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; V(z_1, z_2, \varsigma_2)]. \quad (19)$$

Далее, дифференцируя обе части соотношения (19) по переменной ς_2 с учётом второго уравнения системы (17), получим:

$$\frac{\partial V}{\partial \varsigma_2} = \frac{\varsigma_2^2 \cdot g + \varsigma_1 \cdot F - \varsigma_1 \cdot \varsigma_2 \cdot F'_{\varsigma_2}}{\varsigma_1 \cdot \varsigma_2 \cdot F'_V} . \quad (20)$$

По аналогии с п. 1–3, проверяя, что правая часть к. д. у. (20) не зависит от переменной ς_1, получаем соотношение вида (18), для которого требовалось тождественное её выполнение. А это означает, что правая часть к. д. у. (20) не зависит от переменной ς_1. Интегрируя последнее к. д. у. (20) по переменной ς_2, имеем

$$V = V[z_1, z_2, \varsigma_2; \Phi(z_1, z_2)],$$

где $\Phi(z_1, z_2)$ – произвольная аналитическая функция.

Подставляя значение функции V = V(z_1,z_2, ...) из последнего соотношения в (19), переходя к предыдущим переменным, получим

$$\mathrm{W} = \frac{1}{\varsigma_2} \cdot F[z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; V(z_1, z_2, \varsigma_2; \Phi(\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2))].$$

Таким образом, получено многообразие решений исходной системы, решение непрерывно по переменной ς_1, а по второй переменной ς_2 в точке $\varsigma_2 = \bar{\mathrm{z}}_2 = 0$ имеет особенности первого порядка; после перехода к прежним переменным получим

$$\mathrm{W} = \frac{1}{\bar{\mathrm{z}}_2} \cdot F[z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; V(z_1, z_2, \bar{z}_2; \Phi(\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2))]. \quad (21)$$

Теорема 3. *Пусть в п. о .с. К.–Р. (17)* $f, g \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_3^{(0)})$, *f, g – аналитические функции по переменной W. Если для системы (17) имеет место условие (3), а также условие (18) выполняется, но не тождественно, то находятся некоторые особые либо частные решения системы (17). Если условие (18) выполняется тождественно, тогда исходная система (17) разрешима и многообразие её решений определяется формулой (21). Причём решение системы (17) в области* $\overline{\Pi}_2$ *по переменной* ς_1 *непрерывно, а по переменной* ς_2 *в точке* $\varsigma_2 = 0$ *имеет особенности первого порядка.*

Замечание 3. Если рассматривать п. о. с. К.–Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{(\bar{z}_2)^{\mathrm{m}}}, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{(\bar{\mathrm{z}}_1)^m}$$

и для указанного п. о. с. К.–Р. условия совместности вида (18) будут выполнены тождественно, то для этой системы будут справедливыми утверждения предыдущей теоремы 3.

Замечание 4. Рассмотрим п. о. с. К.–Р. произвольного числа комплексных переменных, например:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar z_1} = f_1(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,\cdots,\mathrm{z_n},\mathrm{\bar z_n};W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar z_2} = \frac{f_2(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,\cdots,z_n,\bar z_n;W)}{(\bar z_1)^{\mathrm m}},\cdots,$$
$$\frac{\partial W}{\partial \bar z_n} = \frac{f_n(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,\cdots,z_n,\bar z_n;W)}{(\bar z_{n-1})^{\mathrm m}}, \quad (m\ge 2), \tag{22}$$

а также системы вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar z_1} = \frac{f_1(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,\cdots,\mathrm{z_n},\mathrm{\bar z_n};W)}{(\mathrm{\bar z_2})^{\mathrm m}}, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar z_2} = f_2(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,\cdots,\mathrm{z_n},\mathrm{\bar z_n};W),$$
$$\frac{\partial W}{\partial \bar z_3} = \frac{f_2(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,\cdots,z_n,\bar z_n;W)}{(\bar z_1)^{\mathrm m}},\cdots,\frac{\partial W}{\partial \bar z_n} = \frac{f_n(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,\cdots,z_n,\bar z_n;W)}{(\bar z_{n-1})^{\mathrm m}}, \quad (m\ge 2), \tag{23}$$

где $f_k \in RA(\overline{\Pi}),\ \mathrm{W}\in RA(\Pi_3^{(0)}),\quad f_k -$ аналитические по переменной W функций, и другие виды п. о. с. К.–Р. Если для этих систем условия совместности будут выполнены, но не тождественно, тогда, решая эти функциональные комплексные соотношения, возможно, получим некоторые частные решения указанных систем. Если же эти условия совместности выполняются тождественно, то по аналогии с предыдущим пунктом получим многообразие решений системы (22) и (23) определёнными формулами, являющихся непрерывными во всей области.

Литература

1. *Векуа И.Н.* Обобщённые аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

2. *Векуа И.Н.* Неподвижные особые точки обобщённых аналитических функций // ДАН СССР. – 1962. – Т. 145, № 1. – С. 24–26.

3. *Михайлов Л.Г.* Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. – Душанбе: Дониш, 1963. – 268 с.

4. *Михайлов Л.Г.* Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных, с двумя неизвестными функциями. – Душанбе: Дониш, 1986, – 116 с.

5. *Михайлов Л.Г.* К сингулярной теории полных дифференциалов // ДАН – 1997. – Т. 354, № 1. – С. 21–24.

6. *Михайлов Л.Г.* О вырождении порядка дифференциальных уравнений до нулевого порядка и о некоторых вопросах сингулярного анализа // ДАН – 2002. – Т. 384, № 6. – С. 731–734.

7. *Михайлов Л.Г.* О некоторых переопределённых системах уравнений в частных производных с сингулярными точками // ДАН – 2004. – Т. 398, № 2. – С. 1–4.

8. *Шарипов Б.* Явные формулы представления решений некоторых квазилинейных систем Коши–Римана с двумя комплексными переменными // ДАН Тадж. ССР. – 1985. – Т. 28, № 1. – С. 16–20.

9. *Шарипов Б.* Об одном классе нелинейных обобщенных систем Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 9. – С. 1252–1256.

10. *Михайлов Л.Г., Шарипов Б.* Об одном классе систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярной линией // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 696–700.

11. *Шарипов Б.* Об одном классе нелинейных обобщенных систем Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Сб. трудов Межд. конференции «Современные проблемы математики и её приложений» (Душанбе, 3–4 июня 2016 г.). – Душанбе: Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, 2016. – С. 66–68.

12. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – Л.: ГИФМЛ, 1959. – 465 с.

Поступила в редакцию 8 апреля 2019 г.

UDC 517 956

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-1-35–42

On One Class Koshi-Riman Nonlinear Generalized System with Singular Factors

B. Sharipov

Tajik State University of Finance and Economics; Republic of Tajikistan, 734055, Dushanbe, Nakhimova st., 64/14; boboali.sharipov@mail.ru

The given research deals with a class of overdetermined generalized Koshi–Rimana systems, for which compatibility conditions are executed as identical, giving grounds for obvious variety of solutions. For this task the behaviour of solutions of the systems in special points of the given area are studied.

Keywords: *special points, compatibility systems, generalized Koshi–Riman systems, singular or special points, variety of the solutions system.*

Received 8 April 2019