УДК 517.9

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-1-21–26

О.В. Чернова

Об ограниченности одного оператора

Белгородский государственный национальный исследовательский университет; Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85; chernova_olga@bsu.edu.ru

В пространстве Гельдера с некоторым весом рассмотрены обобщенный интеграл Векуа–Помпейю и соответствующий обобщенный оператор. Показано, что при выполнении определенных условий этот интегральный оператор будет ограниченным в весовом пространстве Гельдера и обратимым. Кроме того, обратным к нему будет обобщенный оператор системы Коши–Римана. Также в работе установлена ограниченность обобщенного оператора Векуа–Помпейю на всей комплексной плоскости.

Ключевые слова: *весовое пространство Гельдера, обобщенный интеграл Векуа–Помпейю, обобщенный оператор, система Коши–Римана.*

Как правило, при исследовании краевых задач для дифференциальных уравнений и многих задач теории функций возникает тот или иной интегральный оператор [2, 3, 4, 5], для которого очень важно установить непрерывность в определенных функциональных пространствах. В статье исследован один из таких операторов, связанный с эллиптической системой первого порядка на комплексной плоскости [10].

Пусть C – комплексная плоскость, $J \in C^{l\times l}$ – постоянная матрица, собственные значения которой лежат в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$. С каждым числом $z = x + iy \in C$ свяжем $l \times l-$матрицу $z_J = x \cdot 1 + y \cdot J, x, y \in R$, собственными значениями которой служат числа $x + \lambda y,$ где $\lambda \in \sigma(J)$, а *1* есть единичная матрица.

Рассмотрим обобщенный интеграл типа потенциала с комплексной плотностью

$$(T_J f)(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C (\zeta - z)_J^{-1} f(\zeta) d_2\zeta \, , z \in C, \tag{1}$$

где $d_2\zeta$ означает элемент площади, а l (вектор-функция f) удовлетворяет оценке

$$|f(z)| = O(|z|^{\delta}) \text{ при } z \to \infty, \ \delta < -1. \tag{2}$$

Интеграл в формуле (1) назовем обобщенным интегралом Векуа–Помпейю, так как первое упоминание о нем можно найти в работе Д. Помпейю [1], а в той форме, в которой он используется в равенстве (1), в работе И.Н. Векуа [6]. Отметим, что в работе [9] было показано, что если плотность уловлетворяет оценке (2), то такой интеграл непрерывно дифференцируем и является решением обобщенной системы Коши–Римана $L_J\phi = f$, где дифференциальный оператор

$$L_J = \frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x} \tag{3}$$

действует в классе l вектор-функций и определяется матрицей $J \in C^{l\times l}$.

Полученные результаты можно распространить и на функции, которые имеют поведение (2) на бесконечности с фиксированным вещественным δ и принадлежат классу $C^{\mu}(K)$ на любом компакте $K \subseteq C$. С этой целью обозначим класс функций φ, которые удовлетворяют на неограниченном множестве условию Гельдера с показателем μ, через $C_{\mu}^{\mu}(E,\infty)$. Этот класс состоит из функций φ с конечной полунормой

$$[\varphi]_{\mu} = \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^{\mu}},$$

где верхняя грань берется по точкам $z_j \in E$. Заметим, что эти функции удовлетворяют оценке (2) с $\delta = \mu$.

Класс функций φ, для которых новая функция $\psi(z) = (1+|z|)^{\mu-\delta}\varphi(z) \in C_{\mu}^{\mu}(E,\infty)$ с произвольным δ, обозначим через $C_{\delta}^{\mu}(E,\infty)$. Нетрудно заметить, что функция φ имеет поведение (2) на бесконечности, а введенное весовое пространство $C_{\delta}^{\mu}(E,\infty)$ банахово относительно нормы $|\varphi| = \sup_{z\in E} |(1+|z|)^{-\delta}\varphi(z)| + [\psi]_{\mu}$ [8].

В том случае, когда под множеством E понимается замкнутая область $\overline{D}$, пространство $C_{\delta}^{1,\mu}(\overline{D},\infty)$ есть класс непрерывно дифференцируемых в D функ ций φ, для которых справедливо

$$\varphi \in C_{\delta}^{\mu}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} \in C_{\delta-1}^{\mu}. \tag{4}$$

Относительно вложения семейства пространств C_{δ}^{μ} монотонно убывают по μ и возрастают по δ. Подробное описание этих пространств в более общей ситуации нескольких особых точек можно найти в [8]. Далее укажем некоторые их свойства.

Лемма 1. (а) *Пусть* $B = \{|z| \leq R\}$, $K = \{r \leq |z| \leq R\}$, *причем* $0 < 2r < R$, *и вместе с кругом B последовательность колец* $\{2^i z, z \in K\}$, $i = 0,1,\ldots$ *покрывает всю плоскость. С учетом этих обозначений функция* φ *принадлежит весовому пространству* $C_0^{\mu}(C,\infty)$ *тогда и только тогда, когда она принадлежит классу* $C^{\mu}(B)$ *для любого* R *и норма* $|\varphi| = |\varphi|_{C^{\mu}(B)} + \sup_{i\geq 0}|\varphi(2^i z)|_{C^{\mu}(K)}$ *конечна. При этом данная норма эквивалентна норме пространства* C_0^{μ}.

(b) *Пусть* $r < 0$ *и частные производные*

$$\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

принадлежат классу $C_{\delta-1}^{\mu}(C,\infty)$. *Тогда функция* $\varphi \in C_{\delta}^{1\mu}(C,\infty)$ *и справедлива оценка* $|\varphi|_{C_{\delta}^{\mu}} \leq C(|\varphi(0)| + |\varphi_1|_{C_{\delta-1}^{\mu}}| + |\varphi_2|_{C_{\delta-1}^{\mu}})$.

(c) *Для любого неограниченного множества* E *при* $\mu<\nu$ *и* $\delta>\delta_0$ *вложение* $C^{\mu}_{\delta_0}(E,\infty)\subset C^{\nu}_{\delta}(E,\infty)$ *компактно. Кроме того, имеет место вложение* $C^{1,\mu}_{\delta}(C,\infty)\subset C^{\nu}_{\delta}(C,\infty)$, $\mu<\nu$.

Отметим, что согласно определению (4) дифференциальный оператор L_J ограничен $C^{1,\mu}_{\delta}(C,\infty)\to C^{\mu}_{\delta-1}(C,\infty)$.

Основной результат для интеграла типа потенциала (1) и дифференциального оператора (3) получен в [9] и состоит в том, что при определенных условиях T_J представляет собой ограниченный $C^{\mu}_{\delta-1}(C,\infty)\to C^{1,\mu}_{\delta}(C,\infty)$ и обратимый интегральный оператор, а обратным к нему служит обобщенный дифференциальный оператор L_J, определенный в (3).

Для областей D на плоскости, ограниченных гладким контуром Γ,интегральный оператор (1) вводится аналогичным образом. Но чтобы он был ограничен в пространствах C^{μ} и C^{μ}_{δ}, стоит потребовать определенной гладкости контура Γ. Чтобы избежать каких-либо предположений о гладкости контура, воспользуемся оператором P продолжения функций $\varphi\in C(\overline{D})$ на всю плоскость. Сначала будем строить этот оператор локально для тех функций φ, которые обращаются в нуль вне некоторой окрестности фиксированной граничной точки $t_0=x_0+iy_0\in\Gamma$. Если $\rho>0$ достаточно мало, то пересечение Γ с кругом $B_0=\{|z-t_0|<\rho\}$ есть гладкая дуга. Она является графиком некоторой функции $f\in C^1[a,b]$, т. е. либо графиком $y=f(x), a\le x\le b$, либо графиком $x=f(y), a\le y\le b$.

Пусть для определенности имеет место первый случай: $y_0=f(x_0)$ и $\varepsilon>0$ настолько мало, что область D_0, которую можно определить в декартовых координатах $z=x+iy$ неравенствами $|x-x_0|<\varepsilon,\quad |y-f(x)|<\varepsilon$, содержится в круге B_0. Граница области $D_0\cap D$ есть гладкая дуга Γ_0, которая определяется уравнением $y=f(x), |x-x_0|\le\varepsilon$, и соответствующая кусочно-гладкая дуга Γ_0^-, содержащаяся в D за исключением своих концов [7]. Не ограничивая общности, можно считать, что f продолжена до функции $f\in C^1(R)$ с компактным носителем. Пусть $\xi+i\eta=\alpha(x+iy)$ – преобразование плоскости на себя, заданное формулами $\xi=x, \eta=y-f(x)$. Оно является обратимым преобразованием, и обратное $\beta=\alpha^{-1}$ действует по аналогичной формуле $x=\xi, y=\eta+f(\xi)$. В окрестности ∞ эти преобразования тождественны. Так как они непрерывно дифференцируемы, то для некоторой постоянной $M>1$ и любых точек $z_1\ne z_2$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{M}\le\frac{|\alpha(z_1)-\alpha(z_2)|}{|z_1-z_2|}\le M. \qquad (5)$$

Пусть теперь функция φ принадлежит $C^{\mu}(D \cap D_0)$ и обращается в нуль в окрестности дуги Γ_0^-. Положим $\psi(\zeta) = \varphi[\beta(\zeta)],\quad \zeta \in \alpha(D \cap D_0)$ и будем продолжать ее до $\tilde{\psi}$ сначала нулем на соответствующую полуплоскость, а затем на всю плоскость по правилу $\tilde{\psi}(\xi + i\eta) = \tilde{\psi}(\xi - i\eta)$. Тогда равенство $(P_0\varphi)(z) = \tilde{\psi}[\alpha(z)]$ определяет требуемый оператор продолжения, поскольку сужение функции $\tilde{\varphi} = P_0\varphi$ на $D \cap D_0$ совпадает с φ. Очевидно, что $\sup$ - нормы функций ψ и $\tilde{\psi}$ совпадают, а их полунормы

$$[\varphi]_{\mu} = \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^{\mu}}$$

связаны соотношением $[\tilde{\psi}]_{\mu} \leq 2[\psi]_{\mu}$. Согласно (5) имеем аналогичные неравенства $[\psi]_{\mu} \leq M[\varphi]_{\mu}$ и $[\tilde{\varphi}]_{\mu} \leq M[\tilde{\psi}]_{\mu}$. Таким образом, получаем следующую оценку:

$$|P_0\varphi|_{C^{\mu}(C)} \leq 2M^2 |\varphi|_{C^{\mu}(D \cap D_0)}. \tag{6}$$

Согласно вышеуказанному построению и оценке (6) имеем

$$(P_0\varphi)(z) = 0, \quad |z - z_0| \geq M^2\rho. \tag{7}$$

В силу компактности контур Γ можно покрыть конечным числом областей $D_1, \dots, D_n$ того же типа, что и D_0. Пусть P_k – оператор продолжения, отвечающий D_k. Выберем разбиение единицы – семейство функций $\chi_k \in C^1(D_k),\ 1 \leq k \leq n$ и $\chi \in C^1(D)$, таких, что $\chi_k = 0$ в окрестности ∂D_k, функция $\chi = 0$ в окрестности Γ и сумма $\sum_{k=1}^{n} \chi_k(z) + \chi(z) = 1, \quad z \in D$.

Тогда формула $P\varphi = \sum_{k=1}^{n} P_k(\chi_k\varphi) + \chi\varphi$ определяет требуемый оператор продолжения, поскольку для $z \in D$ имеем равенства $(P_k\chi_k\varphi)(z) = (\chi_k\varphi)(z)$, следовательно, $(P\varphi)(z) = \sum_{k=1}^{n} (\chi_k\varphi)(z) + (\chi\varphi)(z) = \varphi(z)$.

Лемма 2. (a) *Если область* D *конечна, то оператор продолжения* P *ограничен* $C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{\mu}(C)$, *причем существует такое* $R > 0$, *что* $(P\varphi)(z) = 0$ *при* $|z| \geq R$.

(b) *Если область* D *бесконечна, то для любого вещественного* δ *оператор* P *ограничен* $C^{\mu}(\overline{D}, \infty) \to C^{\mu}_{\delta}(C, \infty)$.

Доказательство. Заметим, что операторы P_k обладают свойствами, аналогичными (6) и (7), поэтому оператор P ограничен $C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{\mu}(C)$, причем существует такое $R_0 > 0$, что $\sum_{k=1}^{n} P_k(\chi_k\varphi)(z) = 0, |z| \geq R_0$. Если область D конечна, то функция χ имеет компактный носитель, так что $\chi(z) = 0$ при $|z| \geq R$, откуда следует выполнимость утверждения а) леммы по отношению к $R = \max(R_0, R_1)$. В случае бесконечной области D достаточно использовать то, что $(P\varphi)(z) = \varphi(z)$ в окрестности ∞.

Опираясь на оператор продолжения P, введем оператор I_J^2, действующий на функциях $\varphi(z), z \in D$, по формуле

$$I_J^2 \varphi = (T_J P\varphi)|_D \qquad (8)$$

и назовем его по аналогии с (1) обобщенным оператором Векуа–Помпейю. Для бесконечной области D оператор рассматриваем для функций $\psi(z) \in C_{\delta-1}^{\mu}(\overline{D}, \infty)$ и обозначаем соответственно через $I_{J,\delta}^2$.

Теорема. (a) *Если* D *– конечная область, то оператор* I_J^2 *ограничен*

$$C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(C)$$

и верно равенство

$$L_J I_J^2 \psi = \psi.$$

(b) *Если* D *– бесконечная область, то оператор* $I_{J,\delta}^2$ *ограничен*

$$C_{\delta}^{1,\mu}(\overline{D}, \infty) \to C^{1,\mu}(C, \infty), -1 < \delta < 0,$$

и для него верно аналогичное равенство $L_J I_{J,\delta}^2 \psi = \psi$.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю проф. А.П. Солдатову за постановку задачи и помощь на всех этапах ее решения и проф. В.Б. Васильеву за разъяснение вопросов, связанных с написанием и оформлением статьи.

Литература

1. *Pompeiu D*. Sur une classe de fonctions d'une variable complexe // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. – 1912. – V. 33, № 1. – P. 108–113.

2. *Kovaleva L.A., Soldatov A.P.* The Dirichlet problem on two-dimensional stratified sets // Izvestiya: Mathematics. – 2015. – V. 79, № 1. – P. 74–108.

3. *Soldatov A.P.* The Riemann–Hilbert boundary value problem for the Moisil–Theodoresco system // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – V. 239, № 3. – P. 381–411.

4. *Бергман С.* Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 303 с.

5. *Бицадзе А.В*. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 203 с.

6. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. – 512 с.

7. *Солдатов А.П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. – М.: Высш. шк. – 1991. – 206 с.

8. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // СМФН. – 2017. – Т. 63, № 1. – С. 1–189.

9. *Чернова О.В*. Обобщенный оператор Векуа–Помпейю // Научные ведомости БелГУ. – 2018. – Т. 50, № 1. – С. 40–46.

10. *Чернова О.В*. Интегральное представление решений эллиптической системы // Вестник РАЕН. – 2019. – Т. 19, № 2. – С. 179–181.

Поступила в редакцию 24 сентября 2019 г.

UDC 517.9

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-1-21–26

On the Boundedness of one Operator

O.V. Chernova

Belgorod State University;Russia, 308015, Belgorod, Pobedy st., 85; chernova_olga@bsu.edu.ru

The generalized integral of the Vekua-Pompeiu and corresponding generalized operator areexamined in the Hölder space. The study proves that mding some conditions the given integral operator will be bounded in Hölder spaces with a certain weight and thus inversible. Besides, the generalized operator of the Cauchy–Riemann system will be inverse to it. The boundedness for generalized Vekua–Pompeiu operator is established on the whole plane of complex numbers.

Keywords: *Weighted Hölder Space, The Vekua–Pompeiu Generalized Integral, Generalized Operator, the Cauchy–Riemann System.*

Received 24 September 2019 г.