УДК 517.95

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-1-13–20

Ж.А. Балкизов

Первая краевая задача со смещением для уравнения параболо-гиперболического типа второго порядка

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН; Россия, Кабардино-Балкарская Республика, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А; Giraslan@yandex.ru

В статье исследована краевая задача со смещением для неоднородного уравнения параболо-гиперболического типа второго порядка с волновым оператором в области гиперболичности, когда в качестве граничного условия задана линейная комбинация с переменными коэффициентами от значений искомой функции на двух независимых характеристиках и на линии изменения типа. Найдены необходимые и достаточные условия существования и единственности регулярного решения задачи. В некоторых частных случаях представление решения исследуемой задачи выписано в явном виде.

Ключевые слова: *уравнение параболо-гиперболического типа, первая краевая задача, задача со смещением, теорема о среднем значении, условия разрешимости*.

Впервые задача с граничным условием, связывающим значения искомой функции на двух независимых характеристиках гиперболической части области для уравнения Лаврентьева–Бицадзе, была сформулирована и исследована в работе [1]. В работе [2] было введено понятие краевой задачи со смещением и исследован ряд нелокальных краевых задач с разными смещениями для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. В работе [3] найдена связь между решением вырождающегося гиперболического уравнения и оператором дробного интегродифференцирования (в смысле Римана–Лиувилля) и дана методика постановки краевой задачи со смещением для уравнения Геллерстедта. Также в работе [3] было получено свойство решения уравнения Геллерстедта, которое является аналогом теоремы о среднем значении для волнового уравнения. Достаточно полная библиография научных работ, посвященных исследованиям краевых задач со смещениями, приведена в монографиях [4–9], а также в диссертациях [10–12]. Некоторые задачи со смещением, возникающие в естествознании, встречаются в монографиях [13–15].

Нами исследована краевая задача со смещением для неоднородного уравнения параболо-гиперболического типа второго порядка с волновым оператором в области гиперболичности, когда в качестве граничного условия задана линейная комбинация с переменными коэффициентами от значений искомой функции на двух независимых характеристиках и на линии изменения типа. Найдены необходимые и достаточные условия существования и единственности регулярного решения задачи. В некоторых частных случаях представление решения исследуемой задачи выписано в явном виде.

На евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_{yy}-f_1, & y<0, \\ u_{xx}-u_y-f_2, & y>0, \end{cases} \tag{1}$$

где $f_1=f_1(x,y)$, $f_2=f_2(x,y)$ – заданные функции, $u=u(x,y)$ – искомая функция.

Уравнение (1) при $y<0$ совпадает с неоднородным волновым уравнением

$$u_{xx}-u_{yy}=f_1(x,y), \tag{2}$$

а при $y>0$ совпадает с неоднородным уравнением теплопроводности

$$u_{xx}-u_y=f_2(x,y). \tag{3}$$

Уравнение (1) рассматривается в области Ω, ограниченной характеристиками AC: $x+y=0$ и CB: $x-y=r$ уравнения (3) при $y<0$, выходящими из точки $C=(r/2,-r/2)$ и проходящими через точки $A=(0,0)$ и $B=(r,0)$ соответственно, а также прямоугольником с вершинами в точках A, B, $A_0=(0,h)$, $B_0=(r,h)$, $h>0$ при $y>0$. Обозначим $\Omega_1=\Omega\cap\{y<0\}$, $\Omega_2=\Omega\cap\{y>0\}$, $J=\{(x,0):\ 0<x<r\}$, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup J$.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u=u(x,y)$ из класса $C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^2(\Omega_1)\cap C_x^2(\Omega_2)$, u_x, $u_y\in L_1(J)$, удовлетворяющую уравнению (1).

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ \ u(r,y)=\varphi_2(y), \qquad 0\le y<h, \tag{4}$$

$$\alpha(x)u[\theta_0(x)]+\beta(x)u[\theta_r(x)]+\gamma(x)u(x,0)=\psi(x), \qquad 0\le x\le r, \tag{5}$$

где $\theta_0(x)=\left(\dfrac{x}{2};-\dfrac{x}{2}\right)$, $\theta_r(x)=\left(\dfrac{x+r}{2};\dfrac{x-r}{2}\right)$ – аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (2), выходящих из точки $(x,0)$ с характеристиками AC и BC соответственно; $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$; $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\psi(x)$ – заданные функции.

Пусть существует решение задачи (1), (4), (5), и пусть

$$u(x,0)=\tau(x),\ \ 0\le x\le r;\quad u_y(x,0)=\nu(x),\ \ 0<x<r. \tag{6}$$

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y\to+0$ с учетом обозначений (6), получим первое фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из параболической части Ω_2 на линию $y=0$:

$$\tau''(x)-\nu(x)=f_2(x,0). \tag{7}$$

При предельном переходе к $y\to+0$ из граничных условий (4) получим

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau(r)=\varphi_2(0). \tag{8}$$

Найдем теперь фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_1 области Ω на линию изменения типа $y=0$. С этой целью докажем следующую лемму (теорему) о среднем значении для неоднородного одномерного волнового уравнения (2).

Лемма 1. *Всякое регулярное решение уравнения (2), удовлетворяющее условию* $u(x,0)=\tau(x)$, *обладает тем свойством, что*

$$u[\theta_0(x)]+u[\theta_r(x)]=u(x,0)+u\left(\frac{r}{2},-\frac{r}{2}\right)+\frac{1}{2}\int\limits_{-r/2}^{0}\int\limits_{-s}^{r+s}f(t,s)dt\,ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{(x-r)/2}^{0}\int\limits_{x-s}^{r+s}f(t,s)dt\,ds-\frac{1}{2}\int\limits_{-x/2}^{0}\int\limits_{-s}^{x+s}f(t,s)dt\,ds. \tag{9}$$

Действительно, решение задачи (6) для уравнения (2) выписывается по формуле [20]:

$$u(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu(t)dt-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y}\int\limits_{x-y+s}^{x+y-s}f(t,s)dt\,ds. \tag{10}$$

Из формулы (10) находим

$$u[\theta_0(x)]=u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)=\frac{\tau(0)+\tau(x)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{0}\nu(t)dt-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{-x/2}\int\limits_{x+s}^{-s}f(t,s)dt\,ds,$$

$$u[\theta_r(x)]=u\left(\frac{x+r}{2},\frac{x-r}{2}\right)=\frac{\tau(x)+\tau(r)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{r}^{x}\nu(t)dt-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{(x-r)/2}\int\limits_{r+s}^{x-s}f(t,s)dt\,ds,$$

откуда

$$u[\theta_0(x)]+u[\theta_r(x)]=\tau(x)+\frac{\tau(0)+\tau(r)}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{r}\nu(t)dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{(x-r)/2}\int\limits_{r+s}^{x-s}f(t,s)dt\,ds-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{-x/2}\int\limits_{x+s}^{-s}f(t,s)dt\,ds. \tag{11}$$

Найдем

$$u\left(\frac{r}{2},-\frac{r}{2}\right)=\frac{\tau(0)+\tau(r)}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{r}\nu(t)dt-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{-r/2}\int\limits_{r+s}^{-s}f(t,s)dt\,ds. \tag{12}$$

Из (11) и (12) приходим к (9).

Для дальнейшего рассуждения воспользуемся формулой (9). Найдем значение $u\left(\frac{r}{2};-\frac{r}{2}\right)$. При $x=0$ из граничного условия (5) с учетом первого из условий (8) находим

$$[\alpha(0)+\gamma(0)]\varphi_1(0)+\beta(0)u\left(\frac{r}{2};-\frac{r}{2}\right)=\psi(0),$$

откуда при $\beta(0)\neq 0$ находим

$$u\left(\frac{r}{2};-\frac{r}{2}\right)=\frac{\psi(0)-[\alpha(0)+\gamma(0)]\varphi_1(0)}{\beta(0)}. \tag{13}$$

Аналогично при $x=r$ и $\alpha(r)\neq 0$ из (5) и (8) найдем

$$u\left(\frac{r}{2};-\frac{r}{2}\right)=\frac{\psi(r)-[\beta(r)+\gamma(r)]\varphi_2(0)}{\alpha(r)}. \tag{14}$$

Таким образом, если $\alpha^2(r)+\beta^2(0)\neq 0$, то значение искомой функции $u(x,y)$ в точке $C=\left(\frac{r}{2};-\frac{r}{2}\right)$ находится по одной из формул (13) или (14). Пусть, например, $\alpha(r)\neq 0$. Тогда равенство (9) перепишется в следующем виде:

$$u[\theta_0(x)]+u[\theta_r(x)]=\tau(x)+F_1(x), \tag{15}$$

где $F_1(x)=\dfrac{\psi(r)-[\beta(r)+\gamma(r)]\varphi_2(0)}{\alpha(r)}+\dfrac{1}{2}\left(\int\limits_{-r/2}^{0}\int\limits_{-s}^{r+s}-\int\limits_{(x-r)/2}^{0}\int\limits_{x-s}^{r+s}-\int\limits_{-x/2}^{0}\int\limits_{-s}^{x+s}\right)f_1(t,s)\,dt\,ds$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha(x)\equiv\beta(x)\ \ \forall\ x\in[0,r]$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть заданные функции* $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$; $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\psi(x)$; $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ *таковы, что*

$$\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ \varphi_3(y)\in C[0,h]\cap C^1]0,h[;\tag{16}$$

$$\alpha(x),\ \beta(x),\ \gamma(x),\ \psi(x)\in C^1[0,r]\cap C^2]0,r[;\tag{17}$$

$$f_1(x,y)\in C^1(\overline{\Omega}_1),\ f_2(x,y)\in C(\overline{\Omega}_2);\tag{18}$$

$$\alpha(x)\equiv\beta(x),\ \alpha(x)+\gamma(x)\neq 0,\ \alpha^2(x)+\gamma^2(x)\neq 0\ \ \forall\ x\in[0,r];\tag{19}$$

$$\alpha^2(r)+\beta^2(0)\neq 0.\tag{20}$$

Тогда существует единственное регулярное в области Ω решение задачи 1.

Действительно, из (5) с учетом (15) и (19) находим

$$\tau(x)=\frac{\psi(x)-\alpha(x)F_1(x)}{\alpha(x)+\gamma(x)},$$

откуда при условиях (17), (18) из (7) имеем

$$\nu(x)=\tau''(x)-f_2(x,0)=\left(\frac{\psi(x)-\alpha(x)F_1(x)}{\alpha(x)+\gamma(x)}\right)''-f_2(x,0).$$

При найденных значениях $\tau(x)$ и $\nu(x)$ решение исходной задачи (1), (4), (5) в области Ω_1 выписывается по формуле (10), а в области Ω_2 решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности (3) при заданных граничных условиях (4) и при заданном начальном условии $u(x,0)=\tau(x)$ выписывается по формуле [15]:

$$u(x,y)=\int\limits_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)\,d\eta-\int\limits_0^y G_\xi(x,y;r,\eta)\varphi_2(\eta)\,d\eta+$$

$$+\int\limits_0^r G(x,y;\xi,0)\tau(\xi)\,d\xi-\int\limits_0^y\int\limits_0^r G(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,\tag{21}$$

где $G(x,y;\xi,\eta)=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi(y-\eta)}}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[\dfrac{x-\xi+2rn}{4(\eta-y)}\right]-\exp\left[\dfrac{x+\xi+2rn}{4(\eta-y)}\right]\right\}$ – функция Грина первой краевой задачи уравнения теплопроводности.

Пусть теперь $\alpha(x)\neq\beta(x)\ \ \forall x\in[0,r]$. Справедлива следующая теорема единственности регулярного решения задачи (1), (4), (5).

Теорема 2. *Пусть относительно заданных функций* $\alpha(x)$, $\beta(x)$ *и* $\gamma(x)$ *выполнено условие (20), а также:*

$$\alpha^2(x)+\beta^2(x)+\gamma^2(x)\neq 0\ \ \forall\ x\in[0,r],\tag{22}$$

$$\alpha(x),\ \beta(x),\ \gamma(x)\in C^1[0,r]\tag{23}$$

$$\alpha(x)\neq\beta(x)\ \ \forall x\in[0,r]\tag{24}$$

$$\left[\frac{\alpha(x)+\beta(x)+2\gamma(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right]'\geq 0\ \ \forall x\in[0,r].\tag{25}$$

Тогда решение задачи 1 единственно в требуемом классе.

Доказательство. При условии (24) из (5) и (15) приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} u[\theta_0(x)] + u[\theta_r(x)] = \tau(x) + F_1(x), \\ \alpha(x)u[\theta_0(x)] + \beta(x)u[\theta_r(x)] = \psi(x) - \gamma(x)\tau(x) \end{cases} \tag{26}$$

относительно неизвестных $u[\theta_0(x)]$ и $u[\theta_r(x)]$. Решая систему (24), находим, что

$$u[\theta_0(x)] = \frac{\beta(x) + \gamma(x)}{\beta(x) - \alpha(x)}\tau(x) + \frac{\beta(x)F_1(x) - \psi(x)}{\beta(x) - \alpha(x)}. \tag{27}$$

С другой стороны, из формулы (10) находим, что

$$u[\theta_0(x)] = \frac{\varphi_1(0) + \tau(x)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^x \nu(s)ds + \frac{1}{2}\int_{-x/2}^{0}\int_{-t}^{x+t} f_1(s,t)ds\,dt. \tag{28}$$

Подставляя значение $u[\theta_0(x)]$ из (28) в (27), а затем дифференцируя полученное равенство, приходим к следующему соотношению:

$$\nu(x) = [a(x)\tau(x)]' - F_2(x), \tag{29}$$

где $a(x) = \dfrac{\alpha(x) + \beta(x) + 2\gamma(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$, $F_2(x) = \displaystyle\int_{-x/2}^{0} f_1(x+t,t)dt + 2\left[\frac{\beta(x)F_1(x) - \psi(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}\right]'$.

Соотношение (29) есть фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ в случае, когда соблюдено условие (24).

Для соответствующей исходной задаче (1), (4), (5) однородной задачи $\left(\varphi_i(y) = f_j(x,y) = \psi(x) \equiv 0,\ i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,2}\right)$ рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^r \tau(x)\nu(x)dx.$$

Из соотношения (7) при условиях (8) имеем, что рассматриваемый интеграл

$$J = \int_0^r \tau(x)\nu(x)dx = -\int_0^r [\tau'(x)]^2 dx \le 0. \tag{30}$$

А из соотношения (29) находим

$$J = \int_0^r \tau(x)\nu(x)dx = \int_0^r \tau(x)[a(x)\tau(x)]' dx = \frac{1}{2}\int_0^r a'(x)\tau^2(x)dx. \tag{31}$$

Если выполнены условия (22), (23), (25) теоремы 2, то из (30) и (31) следует, что $\tau(x) \equiv 0$. При этом из соотношений (7) или (29) имеем, что и $\nu(x) \equiv 0$. Тогда из формулы (10) заключаем, что $u(x,y) \equiv 0$ в области Ω_1, а из (21) следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в Ω_2. Таким образом, показано, что однородная задача, соответствующая задаче (1), (4), (5), при выполнении условий теоремы 2 имеет только тривиальное решение $u(x,y) \equiv 0$ в области Ω, что говорит о единственности регулярного решения исследуемой *задачи 1*.

Так как

$$a'(x) = \left[\frac{\alpha(x) + \beta(x) + 2\gamma(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}\right]' = 2\left[\frac{\alpha(x) + \gamma(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}\right]' = 2\left[\frac{\beta(x) + \gamma(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}\right]',$$

то вместо условия (25) в теореме 2 можно воспользоваться одним из следующих более простых равносильных условий:

$$\left[\frac{\alpha(x)+\gamma(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right]^{/}\geq 0 \text{ или } \left[\frac{\beta(x)+\gamma(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right]^{/}\geq 0 .$$

Теорема 3. *Пусть относительно заданных функций* $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$; $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\psi(x)$; $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ *выполнены условия (16), (20), (22), (23), (24), (25), и пусть*

$$\psi(x)\in C^1[0,r],\ f_1(x,y)\in C(\overline{\Omega}_1),\ f_2(x,y)\in C(\overline{\Omega}_2). \qquad (32)$$

Тогда решение задачи 1 существует.

Доказательство. Для доказательства теоремы 3 вернемся к соотношениям (7), (8) и (29). Исключая из (7) и (29) искомую функцию $\nu(x)$, относительно $\tau(x)$ приходим к задаче нахождения решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида

$$\tau''(x)-a(x)\tau'(x)-a'(x)\tau(x)=f_2(x,0)-F_2(x), \qquad (33)$$

удовлетворяющего условиям (8).

При соблюдении условия (25) однородная задача, соответствующая задаче (33), (8) имеет только тривиальное решение $\tau(x)\equiv 0$. Это следует из равенства

$$\int_0^r \tau(x)[\tau''(x)-a(x)\tau'(x)-a'(x)\tau(x)]dx=-\int_0^r[\tau'(x)]^2dx-\frac{1}{2}\int_0^r a'(x)\tau^2(x)dx=0 .$$

Поэтому, согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка, существует единственная функция Грина $G(x,\xi)$, с помощью которой решение задачи (32), (8) выписывается по формуле:

$$\tau(x)=\frac{1}{r}\left[r-x+\int_0^r G(x,\xi)[a(\xi)+a'(\xi)(r-\xi)]d\xi\right]\varphi_1(0)+$$
$$+\frac{1}{r}\left[x+\int_0^r G(x,\xi)[\xi\, a(\xi)]^{/}\,d\xi\right]\varphi_2(0)+\int_0^r G(x,\xi)f_2(\xi,0)d\xi-\int_0^r G(x,\xi)F_2(\xi)d\xi .$$

В случае, когда $\left[\dfrac{\alpha(x)+\beta(x)+2\gamma(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right]^{/}\equiv 0\ \ \forall\, x\in[0,r]$, то есть в случае

$$a(x)=\frac{\alpha(x)+\beta(x)+2\gamma(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}=a=const\quad \forall\, x\in[0,r],$$

функция $G(x,\xi)$ имеет следующий вид:

$$G(x,\xi)=\frac{1}{a\left(e^{ar}-1\right)}\begin{cases}\left(e^{a(r-\xi)}-1\right)\left(1-e^{ax}\right), & 0\leq x<\xi,\\ \left(e^{a(r-\xi)}-e^{a(x-\xi)}\right)\left(1-e^{a\xi}\right), & \xi<x\leq r,\end{cases} \qquad (34)$$

и с помощью нее решение задачи (33), (8) выписывается в явном виде по формуле [21]:

$$\tau(x)=\int_0^r G(x,\xi)f_2(\xi,0)d\xi-\int_0^r G(x,\xi)F_2(\xi)d\xi+G_\xi(x,1)\varphi_2(0)-G_\xi(x,0)\varphi_1(0). \qquad (35)$$

Явный вид искомой функции $\tau=\tau(x)$ выписывается также и в случаях, когда либо $\alpha^2(x)+\gamma^2(x)\equiv 0$, либо $\beta^2(x)+\gamma^2(x)\equiv 0$, либо же $\alpha^2(x)+\beta^2(x)\equiv 0$ и при этом выполнены условия (22), (23). Так, в случаях, когда $\alpha^2(x)+\gamma^2(x)\equiv 0$ или $\beta^2(x)+\gamma^2(x)\equiv 0$, решение $\tau=\tau(x)$ задачи (33), (8) выписывается по формуле (35), где $G(x,\xi)$ определяется по формуле (34) при $a=-1$ и $a=1$ соответственно. А при $\alpha^2(x)+\beta^2(x)\equiv 0$ из условия (5) сразу следует, что $\tau(x)=\dfrac{\psi(x)}{\gamma(x)}$.

В каждом из рассмотренных выше случаев по найденному значению $\tau(x)$ из фундаментальных соотношений (7) или (29) можно найти и функцию $\nu(x)$. При этом решение исходной задачи (1), (4), (5) в области Ω_1 выписывается по формуле Даламбера (10), а в области Ω_2 решение задачи (3), (4) при заданном $u(x,0)=\tau(x)$ дается по формуле (21).

Литература

1. *Жегалов В.И.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на линии перехода // Ученые записки Казанского университета. – 1962. – Т. 122, кн. 3. – С. 3–16.
2. *Нахушев А.М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Доклады Академии наук СССР. – 1969. – Т. 187, № 4. – С. 736–739.
3. *Нахушев А.М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифф. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 1. – С. 44–59.
4. *Репин О.А.* Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. – Самара: Издательство Самарского филиала Саратовского университета, 1992. – 162 с.
5. *Кальменов Т.Ш.* Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. – Шымкент: Гылая, 1993. – 328 с.
6. *Салахитдинов М.С., Уринов А.К.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. – Ташкент: ФАН, 1997. – 165 с.
7. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
8. *Нахушева З.А.* Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. – Нальчик: КБНЦ РАН, 2011. – 196 с.
9. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений смешанного типа. – М.: Физматлит, 2014. – 304 с.
10. *Нахушев А.М.* К теории линейных краевых задач для гиперболических и смешанных уравнений второго порядка: дис. … д-ра ф.-м. н. – Новосибирск, 1970. – 172 с.
11. *Жегалов В.И.* Исследование краевых задач со смещением для уравнений смешанного типа: дис. … д-ра ф.-м. наук. – Новосибирск, 1988.
12. *Кожанов А.И.* К теории уравнений составного типа: дис. … д-ра ф.-м. наук. – Новосибирск, 1993. – 329 с.
13. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. – М.: Иностранная литература, 1961. – 208 с.
14. *Франкль Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике. – М.: Наука, 1973. – 712 с.
15. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

16. *Килбас А.А., Репин О.А.* Задача со смещением для параболо-гиперболического уравнения // Дифф. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 6. – С. 799–805.

17. *Репин О.А.* Нелокальная краевая задача для параболо-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа // Дифф. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 1. – С. 173–176.

18. *Мирсабуров М., Чориева С.Т.* О задаче с тремя вариантами смещений для уравнения смешанного типа // Известия вузов. Сер.: Математика. – 2016. – № 4. – С. 32–45.

19. *Балкизов Ж.А.* Об одной краевой задаче типа задачи Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка с тремя смещениями в гиперболической части области // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер.: Математика. Физика. – 2019. – Т. 51, № 1. – С. 5–14.

20. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: МГУ. Наука, 2004. – 798 с.

21. *Хубиев К.У.* Задача типа задачи Бицадзе–Самарского для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа // Математические заметки СВФУ. – 2019. – Т. 26, № 2. – С. 31–40.

Поступила в редакцию 9 октября 2019 г.

UDC 517.95

DOI: 10.21779/2542-0321-2020-35-1-13–20

The First Boundary Value Problem with Bias For a Second-Order Parabolic-Hyperbolic Type Equation

Zh.A. Balkizov

Institute of Applied Mathematics and Automation, KBSC RAS; Russia, 360000, Kabardino-Balkarian Republic, Nalchik, Shortanova st., 89a; Giraslan@yandex.ru

The boundary-value problem with bias for a second-order parabolic-hyperbolic type equation with a wave operator in the region of hyperbolicity is studied when a linear combination with variable coefficients of the values of the desired function on two independent characteristics and on the type change line is specified as the boundary condition. Some necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of a regular solution to the problem are found. In some special cases, the representation of the solution to the problem under study is written out explicitly.

Keywords: *parabolic-hyperbolic type equation, first boundary value problem, bias problem, mean value theorem, solvability conditions.*

Received 9 October 2019