УДК 517.946

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-3-79–85

Э.И. Абдурагимов, П.Э. Абдурагимова, Т.Ю. Гаджиева

Двухточечная краевая задача для одного нелинейного ОДУ 4-го порядка. Существование, единственность положительного решения и численный метод его построения

Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; abduragimov42@mail.ru, tamila.usup@mail.ru

В данной статье предложено доказательство существования единственного положительного решения одной двухточечной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка. Доказательство основано на лемме представленной в статье, и методе линейного преобразования Ц. На. Также предложен алгоритм численного метода построения положительного решения и приведен практический пример применения этого алгоритма. Данный метод не является итерационным, что и позволяет нам говорить о его преимуществе по сравнению с другими.

Ключевые слова: *единственность, положительное решение, существование, краевая задача, нелинейное дифференциальное уравнение.*

Введение

Достаточно много работ посвящено исследованиям краевых задач, в частности исследованиям положительных решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений (см. [1–10] и др.), где ключевую роль играют вопросы существования положительного решения, асимптотика, поведение и т. д. Основными целями исследования являлись изучение вопросов единственности положительного решения и разработка алгоритма построения решения одной двухточечной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения численными методами. Следует отметить, что данная работа является неким дополнением к опубликованным нами ранее [3, 4].

Пусть дано семейство двухточечных краевых задач:

$$y_i^{(4)} + x^m|y_i|^n = 0,\ 0 < x < 1, \tag{1_i}$$

$$y_i(0) = y_i''(0) = y_i'''(0) = 0, \tag{2_i}$$

$$y_i^{(i)}(1) = 0,\ i = 0,1, \tag{3_i}$$

где $m \geq 0$, $n > 1$ – константы. Здесь $y_i \equiv 0$ является тривиальным решением задачи (1_i)–(3_i). Нас интересует положительное решение этой задачи, его существование, единственность и численный метод его построения.

Метод доказательства существования и единственности положительного решения семейства двухточечных краевых задач:

$$y_i^{(4)} + x^m|y_i|^n = 0,\ 0 < x < 1,$$

$$y_i(0) = y_i'(0) = y_i''(0) = 0, \tag{4}$$

$$y_i^{(i)}(1) = 0\,, i = 0,1,2,3$$

и численный метод его построения были предложены в [3]. А в [4] с помощью разработанного автором [3] метода удалось также доказать существование и единственность положительного решения семейства двухточечных краевых задач:

$$\begin{aligned} & y_i^{(4)} + x^m |y_i|^n = 0,\ 0 < x < 1, \\ & y_i(0) = y_i'(0) = y_i'''(0) = 0, \\ & y_i^{(i)}(1) = 0\,, i = 0,1,2\,. \end{aligned} \qquad (5)$$

Наконец, легко убедиться, что, применяя метод, разработанный в [3], можно доказать существование и единственность положительного решения двухточечной краевой задачи:

$$\begin{aligned} & y^{(4)} + x^m |y|^n = 0,\ 0 < x < 1, \\ & y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, \\ & y\ (1) = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

и указать алгоритм его построения численными методами.

Задачи (4)–(6) и (1_i)–(3_i) исчерпывают все случаи, когда задаются по три условия из условий $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$. Из этих четырех задач, к которым применимы методы работы [3], осталась неизученной задача (1_i)–(3_i). Доказательство существования и единственности положительного решения проводится по той же схеме, что и в [3]. Нами предложен неитерационный численный метод построения положительного решения с примером его применения.

При построении решения нелинейных краевых задач численными методами применяются итерационные процессы, которые сходятся к положительному решению. Но не всегда возможно использование итерационных процессов при построении, сходящихся к положительному решению из-за наличия тривиального решения кроме положительного решения. Например, уравнение $x = x^3$ имеет три решения: $x = 0$, $x = -1$ и $x = 1$. Однако простой итерационный процесс $x_{n+1} = x_n^3$ при $n = 0,1,2,\ldots$ сходится к положительному решению $x = 1$ только при начальном приближении $x_0 = 1$. Поэтому огромное значение имеет разработка численного метода, позволяющего построить положительное решение нелинейной задачи при наличии тривиального решения. Численный метод построения положительного решения не является итерационным. Причем алгоритм метода сводится к численному решению задач Коши и простейшим вычислениям.

Благодаря специальному виду данного уравнения нам удалось предложить неитерационный численный метод построения положительного решения задачи (1_i)–(3_i). При этом для приближенного решения задачи Коши мы воспользовались устойчивым одношаговым численным методом Рунге–Кутта 4-го порядка, который сходится к точному решению с порядком $O(h^4)$.

Вспомогательные предложения

Рассмотрим задачу Коши:

$$y^{(4)} + x^m |y|^n = 0,\ 0 < x < 1, \tag{7}$$

$$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, \tag{8}$$

$$y'(0) = A, \tag{9}$$

где A – положительная постоянная. Согласно [3], проинтегрировав уравнение (7) от 0 до x с учетом начальных условий (8), (9), получим

$$y'''(x) = -\int_0^x s^m \cdot |y(s)|^n ds, \tag{10}$$

$$y''(x) = -\int_0^x (x-s)\cdot s^m \cdot |y(s)|^n ds, \tag{11}$$

$$y'(x) = A - \int_0^x \frac{(x-s)^2}{2}\cdot s^m \cdot |y(s)|^n ds, \tag{12}$$

$$y(x) = Ax - \int_0^x \frac{(x-s)^3}{6}\cdot s^m \cdot |y(s)|^n ds. \tag{13}$$

Лемма. При любом $A > 0$ существуют единственные точки $x_0 > x_1 > 0$, такие, что $y(x_0) = 0$, $y(x) > 0$ при $x \in (0, x_0)$ *и* $y(x) < 0$ при $x > x_0$, $y'(x_1) = 0$, $y'(x) > 0$ при $x \in (0, x_1)$ и $y'(x) < 0$ при $x > x_1$, *где* $y(x)$ – решение задачи (7)–(9).

Доказательство. Из (10) следует, что $y'''(x) < 0$, и можно сделать вывод, что функция $y'(x)$ является выпуклой вверх функцией. Согласно (11) легко увидеть, что $y'(x)$ убывает. А так как $A > 0$ и $y'(x)$ является выпуклой вверх и убывающей функцией, то существует единственная точка $x_1 > 0$, такая, что $y'(x_1) = 0$, $y'(x) > 0$ при $x \in [0, x_1)$ и $y'(x) < 0$ при $x > x_1$.

В силу того, что $y'(x) > 0$ на $(0, x_1)$, следовательно, $y(x)$ возрастает на этом промежутке. Согласно (11) $y''(x) < 0$, следовательно, $y(x)$ – выпуклая вверх функция при $x > 0$. Как выше указано, $y'(x) < 0$ при $x > x_1$, откуда следует, что $y(x)$ убывает и является выпуклой вверх при $x > x_1$. Итак, найдется единственная точка $x_0 > x_1$, такая, что $y(x_0) = 0$, $y(x) > 0$ при $x \in (0, x_0)$ и $y(x) < 0$ при $x > x_0$. Лемма доказана.

Существование и единственность положительного решения

Для доказательства существования и единственности воспользуемся линейной группой преобразований, введенной На Ц. [11]:

$$\begin{cases} x = A_i^{\alpha}\bar{x}, \\ y_i = A_i^{\beta}\bar{y}_i,\ i = 0,1, \end{cases} \tag{14}$$

где α, β – неизвестные константы, подлежащие определению, A_i – положительный параметр преобразования. Применяя это преобразование к уравнению (1_i), получим

$$A_i^{\beta-4\alpha}\bar{y}_i^{(4)} + A_i^{\alpha m+\beta n}\bar{x}^m \bar{y}_i^n = 0. \tag{15}$$

Если выбрать константы α и β удовлетворяющими равенству

$$\beta - 4\alpha = \alpha m + \beta n\,, \tag{16}$$

то уравнение не будет зависеть от параметра A_i и примет вид

$$\bar{y}_i^{(4)} + \bar{x}^m |\bar{y}_i|^n = 0\,. \tag{17}$$

Следовательно, уравнение (1_i) инвариантно относительно преобразования (14). Пусть A_i – недостающее до задачи Коши начальное условие к условиям (2_i) для уравнения (1_i)

$$y_i'(0) = A_i\,. \tag{18}$$

Необходимо подобрать параметр A_i так, чтобы решение задачи Коши (7)−(9) с $A = A_i$ удовлетворяло граничному условию (3_i). Заметим, что полученное решение и будет решением краевой задачи (1_i)–(3_i). Перепишем условие (18) в координатах $(\bar{x}, \bar{y}_i)$:

$$A_i^{\beta-\alpha} \cdot \bar{y}_i'\ (0) = A_i\,. \tag{19}$$

При выполнении условия

$$\beta - \alpha = 1 \tag{20}$$

уравнение (19) не будет зависеть от A_i.

Следовательно,

$$\bar{y}_i'(0) = 1\,. \tag{21}$$

Из систем (16), (20) получим, что

$$\alpha = -\frac{n-1}{m+n+3}, \tag{22}$$

$$\beta = \frac{m+4}{m+n+3}. \tag{23}$$

Таким образом, из (17) и (21) с учетом условий (2_i) в новых координатах получим следующую задачу Коши:

$$w^{(4)} + \bar{x}^m\, |w|^n = 0, \tag{24}$$

$$w(0) = w''(0) = w'''(0) = 0\,, \tag{25}$$

$$w'(0) = 1, \tag{26}$$

где $w = \bar{y}_i(\bar{x}), i = 0{,}1$, а именно $w(\bar{x}) = \bar{y}_0(\bar{x})$, если $w(\bar{x}_0) = 0$ и $w(\bar{x}) = \bar{y}_1(\bar{x})$, если $w'(\bar{x}_1) = 0$, а существование единственных таких точек $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_1$ доказано в лемме с $A = 1$.

Так как нам необходимо, чтобы выполнялось условие $x = 1$ при $\bar{x} = \bar{x}_i$, $i = 0{,}1$, то параметр A_i в (14) может быть определен однозначно:

$$A_i = (\bar{x}_i\,)^{-\frac{1}{\alpha}}, i = 0{,}1, \tag{27}$$

где число α определено равенством (22). Следовательно, формулы (14) единственным образом определяют решения задач (1_i)–(3_i).

Легко убедиться, что $y_i \in C^4[0,1]$. Пусть $w(\bar{x})$ − решение задачи Коши (24−26) на $[0,\bar{x}_0]$. Тогда для решения $\bar{y}_0(\bar{x}) = w(\bar{x})$ справедливо равенство (13) с $A=1$ и $x=\bar{x}$, откуда следует, что $0 \le \bar{y}_0(\bar{x}) \le \frac{\bar{x}_0^2}{2}$. Как видно из (24), $\bar{y}_0 \in C^4[0,\bar{x}_0]$. Значит, из (14) с $A=1$ можно сделать вывод, что $y_0 \in C^4[0,1]$. Аналогично можно убедиться, что $y_1 \in C^4[0,1]$.

Доказана

Теорема. Задача (1_i)–(3_i) (i = 0,1) при любых $m \ge 0,\ n > 1$ имеет единственное положительное решение.

Замечание 1. С помощью замены $t = \frac{x}{a}$, где a – произвольное положительное число, можно свести отрезок $[0,a]$ к отрезку $[0,1]$, что позволяет использовать сформулированную нами теорему для любого отрезка $[0,a]$, заменив условие (3_i) на $y_i^{(i)}(a) = 0, i = 0,1$.

Замечание 2. Легко проверить с помощью формул (10)–(13), что если в задаче (1_i)–(3_i) положить i равным 2 или 3, то такая задача не имеет положительного решения.

Численный метод построения положительного решения

На основании вышеизложенного можно сформулировать алгоритм, позволяющий нам построить единственное положительное решение задачи (1_i)−(3_i):

1. Определяем α и β согласно формулам (22), (23).
2. Используя какой-либо численный метод (к примеру, метод Рунге–Кутта 4-го порядка), решим задачу Коши (24)–(26) начиная с $\bar{x} = 0$ до выполнения равенства $\bar{y}_i^{(i)}(\bar{x}_i) = 0$, $i = 0,1$.
3. Вычислим A_i по формуле (27).
4. По формулам (14) находим решение.

Замечание 3. Пункт 4 можно заменить пунктом $4'$. Решаем задачу Коши $(1_i)-(2_i)$, (18) начиная с $x=0$ до $x=1$, используя тот же численный метод, что и в пункте 2 .

Замечание 4. В пункте 2 алгоритма на практике $\bar{y}_i^{(i)}$ может не обратиться в 0 ни в какой точке, т. е. значения $\bar{y}_i^{(i)}$ от положительных могут перейти к отрицательным, минуя значение 0. Поскольку теоретически доказано существование единственной точки $\bar{x}_i$, такой, что $\bar{y}_i^{(i)}(\bar{x}_i) = 0$, i = 0,1, то за $\bar{x}_i$ можно принять такую точку, в которой $|\bar{y}_i^{(i)}| \le \delta$, где δ – достаточно малое число. Этого можно добиться, выбирая шаг *h* метода Рунге–Кутта достаточно малым.

В качестве примера приведем положительное решение задачи Коши $(1_i) - (3_i)$ при $i = 0$:

$$y^{(4)} + y^4 = 0,\ 0 < x < 1,$$

$$y\ (0) = y''(0) = y'''(0) = 0\,,\quad y(1) = 0\,,$$

полученное по приведенному алгоритму.

Положительное решение

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	0,0000	1,2700	2,5400	3,8091	5,0700	6,2898	7,3619	8,0153	7,6881	5,4360	0,0000
r	0,0000		-0,0007	-0,0053	-0,0061	0,0008	0,0037	0,0314	0,0432		0.0000

В последней строке таблицы приведены значения невязок в узлах таблицы, которые вычислялись по приближенной формуле

$$r_n = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 6y_n - 4y_{n+1} + y_{n+2}}{h^4} + y_n^4\,,\ n = 2,3,\ldots,N-2,\ h = 1/N\,.$$

Как видно из таблицы, значения невязок растут к концу таблицы, что естественно, так как погрешность вычислений накапливается и к концу отрезка интегрирования становится наибольшей.

Литература

1. *Ying He*. Existence theory for single positive solution to fourth-order value problems // Advances in Pure Mathematics. – 2014. – № 4. – P. 480–486.

2. *Liu Y*. Multiple positive of nonlinear singular boundary value problem for fourth-order equations // Advances Mathematics Letters. – 2004. – № 17. – P. 747–757.

3. *Абдурагимов Э.И.* Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка и численный метод его построения // Вестник Самарского государственного университета. – 2010. – № 2 (76). – С. 5–12.

4. *Абдурагимов Э.И., Гаджиева Т.Ю., Магомедова П.К.* Численный метод построения положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка // Вестник ДГУ. – 2015. – Вып. 6. – С. 85–92.

5. *Абдурагимов Э.И.* Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка // Вестник СамГу. – 2014. – № 10 (121). – С. 9–16.

6. *Gidas B., Spruck J.* Global and local behavior of positive solutions of nonlineare elliptic equations // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1982. – V. 4. – P. 525–598.

7. *Ma R., Yang B., Wang Z.* Positive periodic solutions of first-order delay differential equations with impulses // Appl. Math. Comput. – 2013. – № 219. – P. 6074–6083.

8. *Гапоненко Ю.Л.* О положительных решениях нелинейных краевых задач // Вестник Московского университета. Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика. – 1983. – № 4. – С. 8–12.

9. *Feng M.* Existence of symmetric positive solutions for a boundary value problem with integral boundary conditions // Appl. Math. Lett. – 2011. – № 24. – P. 1419–1427.

10. *Cabada A. and Enguiça R.R.* Positive solutions of fourth order problems with clamped beam boundary conditions // Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications. – 2011. – Vol. 74, № 10. – P. 3112–3122.

11. *На Ц*. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. – М.: Мир, 1982. – 296 с.

Поступила в редакцию 22 июля 2019 г.

UDC 517.946

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-3-79-85

Two-point boundary value problem for one nonlinear 4th-order ODE.
Existence, uniqueness of a positive solution and a numerical method for its constructing

E.I. Abduragimov, P.E. Abduragimova, T.Yu. Gadzhieva

Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; abduragimov42@mail.ru, tamila.usup@mal.ru

The article proposes proof of the existence of a unique positive solution of a two-point boundary value problem for a nonlinear differential equation of the fourth order.

The proof is based on the lemma of the first paragraph and the method of linear transformation of Ts. Na. The algorithm of numerical methods of construction of the positive decision and the practical example of application of this algorithm are also given in the article. This method is not iterative, which allows us to talk about its advantage over others.

Keywords: *uniqueness, positive solution, existence, boundary problem, nonlinear differential equation*.

Received 22 July, 2019