УДК 517.968

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-1-56-60

Т.И. Ибавов

Задача Коши для системы *n* дифференциальных уравнений с производными дробного порядка Капуто

Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; ibavov94@mail.ru

В работе исследована задача Коши для системы *n* линейных дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто. При достаточном условии существования дробной производной производная Капуто представлена через дробную производную Римана–Лиувилля. С помощью преобразований Лапласа и метода Крамера получены выражения для образа Лапласа, разложение выражений для образа Лапласа по корням характеристического уравнения. Посредством известных соотношений для образа Лапласа выведены выражения для оригиналов функции. Результаты сформулированы в виде теоремы. Показано, что при $n = 2$ полученные решения переходят в известные ранее решения для системы двух дифференциальных уравнений с дробными производными.

Ключевые слова: *дробная производная Капуто, преобразование Лапласа, задача Коши.*

Введение

Проникновение идей фрактальной геометрии [3] в естествознание сформировало новую концепцию – концепцию фракталов. Особый интерес в концепции фрактала представляет аналитический подход, основанный на использовании математического аппарата дробных дифференциальных уравнений. Многие динамические процессы во фрактальных структурах, как указано в работах [2; 3; 5–7; 9; 10], описываются дробными дифференциальными уравнениями.

Исследованиям задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка посвящено много работ. В монографии [1] приведено решение задача Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля, доказаны существование и единственность решения. В работах [2; 3] исследована задача Коши для осцилляторного уравнения с дробной производной Капуто. В [4] проведено качественное исследование динамической системы, описываемой двумя дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка. В [5] исследована задача Коши для уравнений Эйри с дробной производной Капуто. Работа [6] посвящена исследованию задачи Коши для уравнения нечётного порядка с дробной производной. В [7; 8] исследована задача Коши для системы трех дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто. Работы [9; 10] посвящены исследованию нелинейных динамических систем, описываемых дробными дифференциальными уравнениями. В [9] на основе дробных дифференциальных уравнений разработана и исследована динамика электронов в ветвящихся системах газоразрядных каналов со спадающей концентрацией газа.

Нами исследуется задача Коши для системы *n* дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто.

Задача Коши для системы *n* дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто

Рассмотрим в области D_α систему *n* дифференциальных уравнений с производ ными дробного порядка вида

$$\partial_{0t}^{\alpha} X = AX, \tag{1}$$

где $0<\alpha\le 1$, a_{ij} при $i = 1, 2, \dots n$, $j = 1, 2, \dots n$ – некоторые числа, $\partial_{0t}^{\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha} ds$ – дробная производная Капуто,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $\det A \ne 0$. Для системы (1) рассмотрим следующую задачу.

Задача. Найти решение $X(t)$ – системы уравнений (1), удовлетворяющее начальным условиям $X(0) = X^{(0)}$.

Пусть $D_\alpha \subset AC^2[0,T]$ – область определения оператора ∂_{0t}^{α}. Тогда для любого вектора $X(t)\in D_\alpha$ справедливо равенство [2]

$$\partial_{0t}^{\alpha} x_i(t) = D_{0t}^{\alpha} x_i(t) - \frac{x_i(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

Воспользовавшись равенствами (2), получим

$$D_{0t}^{\alpha} x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \frac{x_i(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Предполагая, что вектор $X(t)\in D_\alpha$ – решение системы (3), применим к системе (3) преобразования Лапласа. Тогда относительно вектора $X(p) = \left(\widetilde{x}_1(p), \widetilde{x}_2(p), \dots, \widetilde{x}_n(p)\right)^T$ получим следующую систему n дифференциальных уравнений:

$$\left(p^{\alpha} - a_{ii}\right)\widetilde{x}_i(p) - \sum_{\substack{j=1 \\ i\ne j}}^{n} a_{ij}\widetilde{x}_j(p) = x_i(0)\,p^{\alpha-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{4}$$

Запишем систему (4) в матричной форме:

$$B\cdot \widetilde{X}(p) = X(0)\cdot p^{\alpha-1}, \tag{5}$$

где $B = \begin{pmatrix} p^{\alpha} - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & p^{\alpha} - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & p^{\alpha} - a_{nn} \end{pmatrix}$.

Определитель матрицы B отличен от нуля, то есть $\det B \neq 0$. Тогда решение системы (4) будет иметь вид

$$\tilde{x}_k(p) = \frac{x_k(0)\, p^{\alpha(n-1)} + \sum\limits_{l=2}^{n-1} p^{\alpha(n-l)} \sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i,j\neq k}}^{n} \overline{M}_{i,j,i=j}^{\,n-l} + \sum\limits_{j=1}^{n} A_{1j}}{p^{1-\alpha}\left(p^{\alpha n} - TrA \cdot p^{\alpha(n-1)} + \sum\limits_{l=2}^{n-1} (-1)^{l} p^{\alpha(n-l)} \overline{M}_{i,j,i=j}^{\,n-l} + \sum\limits_{j=1}^{n} A_{1j}\right)}, \tag{6}$$

k = 1, 2, …, *n,*

где $\overline{M}_{i,j,i=j}^{\,n-l}$ – миноры порядков *(n – l)* диагональных элементов матрицы А, в которой вместо j-го столбца стоит столбец свободных членов системы (5); TrA – след матрицы А; A_{1j} – алгебраические дополнения первой строки матрицы А.

Систему (6) можно представить в виде

$$\tilde{x}_k(p) = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)} \frac{x_k(0)}{p^{1-\alpha(n-1)}} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \frac{\prod\limits_{\substack{i,j=1 \\ i\neq m}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)}{1 - \lambda_m p^{-\alpha}} +$$

$$+ \sum_{l=2}^{n-1} \frac{\sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i,j\neq k}}^{n} \overline{M}_{i,j,i=j}^{\,n-l}}{p^{1-\alpha(n-l)}} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \frac{\prod\limits_{\substack{i,j=1 \\ i\neq m}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)}{1 - \lambda_m p^{-\alpha}}, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

где $i = 1, 2, ..., n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – корни характеристического уравнения системы (5).

В случае, когда $\operatorname{Re} p > 1$, имеют место следующие соотношения [1]:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^{\alpha} z)\,dt = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1,$$

$$\frac{1}{p(1 - \lambda \cdot p^{-\alpha})} = \int_0^{\infty} e^{-pt} E_{\alpha,1}\left(\lambda t^{\alpha}\right) dt, \quad \operatorname{Re} p > 1, \tag{7}$$

$$\frac{1}{p^{1-\alpha}(1 - \lambda \cdot p^{-\alpha})} = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{-\alpha} E_{\alpha,1-\alpha}(\lambda t^{\alpha})\,dt, \quad \operatorname{Re} p > 1.$$

Воспользовавшись соотношениями (7) для системы (6), получим выражение для оригиналов функций $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$:

$$x_k(t) = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)} \Big[t^{n-1} x_i(0) \sum_{m=1}^{n} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i\neq m}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)\, \mathrm{E}_{\alpha,1-\alpha(n-1)}(\lambda_m t^{\alpha}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} t^{n-(k+1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i,j\neq k}}^{n} \overline{M}_{i,j,i=j}^{n-k+1} \sum_{m=1}^{n} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i\neq m}}^{n} \left(\lambda_i-\lambda_j\right) \mathrm{E}_{\alpha,1-\alpha(n-1)}(\lambda_m t^{\alpha}) \Bigg], \; i=1,2,\ldots,n, \quad (8)$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$, $\alpha>0, \beta>0$ – функция Миттага–Леффлера.

Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема. Вектор $X(t)\in D_{\alpha}$ будет решением системы (1), если $\det A\neq 0$ и элементы $x_i(t), i=1,2,\ldots,n$ этого вектора представимы в виде (8).

Рассмотрим случаи, когда n = 2. При n = 2 система (8) примет вид

$$x_1(t)=\frac{x_1(0)}{2}\left(E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^{\alpha})+E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^{\alpha})\right)+\frac{x_2(0)a_{12}-x_1(0)a_{22}+\gamma\cdot x_1(0)}{2\sqrt{\gamma^2+(a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22})}}\left(E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^{\alpha})-E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^{\alpha})\right),$$

$$x_2(t)=\frac{x_2(0)}{2}\left(E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^{\alpha})+E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^{\alpha})\right)+$$

$$+\frac{x_1(0)a_{21}-x_2(0)a_{11}+\gamma\cdot x_2(0)}{2\sqrt{\gamma^2+(a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22})}}\left(E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^{\alpha})-E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^{\alpha})\right), \quad (9)$$

где $\lambda_{1,2}=\gamma\pm\sqrt{\gamma^2+(a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22})}$ – корни характеристического уравнения, $\gamma=\frac{a_{11}+a_{22}}{2}$.

Решение (9) совпадает с решением, полученным в [4] для системы двух линейных дифференциальных уравнений с дробными производными.

Литература

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – С. 498.
2. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – С. 272.
3. *Бейбалаев В.Д.* Решение начальной задачи для дифференциального уравнения «фрактального» осциллятора // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2009. – Т. 1 (19).
4. *Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д.* Динамические системы, описываемые двумя дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка // Владикавказский математический журнал. – 2013. – Т. 15, № 1. – С. 30–40.
5. *Паровик Р.И.* Задача Коши для обобщенного уравнения Эйри // Доклады АМАН. – 2014. – Т. 16, № 3. – С. 64–69.
6. *Псху А.В.* Задача Коши для уравнения нечётного порядка с дробной производной // Материалы Международной конференции «Современные методы теории краевых задач». МГУ им. М.В. Ломоносова. – М.: ООО «МАКС Пресс», – 2018. – С. 185.
7. *Ибавов Т.И.* Решение начальной задачи для одной системы трёх дифференциальных уравнений с производной дробного порядка // Вестник ДГУ. – 2018. –

Т. 33, вып. 1. – С. 78–84.

8. *Ибавов Т.И.* Задача Коши для одной системы трёх дифференциальных уравнений с производной дробного порядка // Сборник материалов IV международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики». – Нальчик, 2018. – С. 104.

9. *Тренькин А.А., Карелин В.И., Алисултанов З.З., Бейбалаев В.Д., Рагимханов Г.Б.* Динамика электронов в ветвящихся системах газоразрядных каналов со спадающей концентрацией газа // Нелинейный мир. – 2017.– Т. 15, № 3. – С. 24–31.

10. *Аливердиев А.А., Бейбалаев В.Д., Мейланов Р.Р., Назаралиев М.А.* Обобщённый нелинейный осциллятор Дуффинга // Тезисы докладов XIII международной научной конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование». – Владикавказ, 2016. – С. 141–142.

Поступила в редакцию 26 февраля 2019 г.

UDC 517.968

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-1-56-60

Cauchy problem for a system of n differential equations with the Caputo fractional derivative

T.I. Ibavov

Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; ibavov94@mail.ru

The paper investigates the Cauchy problem for system of n linear differential equations with the Caputo fractional derivative. At sufficient condition for the existence of fractional derivative, the Caputo derivative is represented by the fractional derivative of Rieman–Liouville. An expression for Laplace's image is obtained by means of Laplace transform and Kramer rules. Decomposition of expressions for the image of Laplace is obtained by the roots of characteristic equation. Using the known relations for the image of Laplace, expressions for originals of functions is obtained. The results are formulated as a theorem. It is shown that for n = 2 the obtained solutions pass into previously known solutions for a system of two differential equations with the Caputo fractional derivative.

Keywords: *fractional derivative Caputo, Laplace transform, Cauchy problem.*

Received 26 February, 2019