УДК 517.5

А.-Р.К. Рамазанов[1], Н.Б. Чантурия[2]

Одна модификация построения поля действительных чисел

[1]Дагестанский государственный университет;ar-ramazanov@rambler.ru
[2]Абхазский государственный университет

Дана одна модификация построения поля действительных чисел как бесконечных десятичных дробей.

Ключевые слова: *рациональные числа, множество действительных чисел.*

Как известно, если исходить из целых чисел, то рациональное число можно определить как число, представимое в виде отношения некоторого целого числа к натуральному числу. При этом каждое рациональное число представимо в виде некоторой соответствующей ему бесконечной периодической десятичной дроби, а десятичные дроби с периодом9 и с периодом 0 приводятся друг к другу. Если исключить из рассмотрения, например, дроби с периодом 9, то приходим к взаимно-однозначному соответствию между множествами рациональных чисел и бесконечных периодических десятичных дробей, сохраняющему отношение порядка и арифметические операции. Это позволяет определить рациональное число как некоторую бесконечную периодическую десятичнуюдробь без периода 9. Сама периодическая десятичная дробь приобретает смысл через рациональные числа как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, составленной из рациональных чисел.

Однако существуют бесконечные непериодические десятичные дроби (например, 0,1010010001…). Их называют иррациональными числами, а множество всех бесконечных десятичных дробей (без периода 9) – действительными числами.

Естественно, возникает вопрос: как вообще определить действительные числа, считая рациональные числа известными, или, в частности, какой смысл придать символам, например, в виде бесконечных непериодических десятичных дробей, исходя из рациональных чисел?

К решению этой проблемысуществуют различные подходы, разработанные известными математиками:

1) через точные границы (супремум и инфимум) множеств рациональных чисел (Вейерштрасс, см. [1], [2]);

2) через сечения множеств рациональных чисел (Дедекинд, см. [3], [4]);

3) через фундаментальные последовательности рациональных чисел (Кантор и Мерэ, см. [5]).

Ниже предлагается модификация первого из указанных трех подходов, в которой вместо сложных для усвоения понятий точных границ числовых множествприменяется понятие предельной дроби.

Действительное число определяем, как обычно, в виде бесконечной десятичной дроби $a_0, a_1, a_2 ...$ без периода 9, взятой со знаком плюс или минус. Как обычно, определяются также положительные и отрицательные действительные числа, число нуль, модуль действительного числа. После этого по аналогии с конечными десятичными дробями можно определить отношение порядка (операции=, <и >) для бесконечных десятичных дробей.

Определение. Бесконечную десятичную дробь $a = \pm a_0, a_1, a_2 \ldots a_k \ldots$ назовем верхней (нижней) ***предельной дробью*** последовательности рациональных чисел

r_1, r_2, ..., r_n, ..., рассматриваемых как некоторые бесконечные периодические десятичные дроби, если $r_k \le a$ (соответственно, $r_k \ge a$) при $k = 1, 2, \ldots$ и для любого натурального числа m найдется номер nтакой, что в записях дробей r_n и a совпадают их соответственно знаки, целые части и поразрядно первые десятичные знаки после запятой не менее m раз.

Как обычно, последовательность рациональных чисел r_1, $\cdots$ r_2, ..., r_n, ... назовем ограниченной сверху (снизу), если существует рациональное числоr, для которого $r_n \le r$ ($r_n \ge r$)при всех $n = 1, 2 \ldots$

В основе нового подхода к построению поля действительных чисел лежит следующая модификация широко известной леммы Вейерштрасса о точных границах числовых множеств.

Основная лемма. Если неубывающая(невозрастающая) последовательность рациональных чисел ограничена сверху (соответственно снизу), то для нее существует единственная верхняя (соответственно нижняя) предельная дробь.

Доказательство. Пусть сначала $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ – данная неубывающая последовательность неотрицательных рациональных чисел в виде бесконечных периодических десятичных дробей

$$r_n = r_{n0}, r_{n1} r_{n2} \ldots r_{nk} \ldots (n = 1, 2, \ldots). \qquad (1)$$

Раз она ограничена сверху, ограничена сверху последовательность целых частей этих дробей $r_{10}, r_{20}, \ldots, r_{n0}, \ldots$ Максимальную среди этих целых частей обозначим черезb_0.

Далее применим метод очистки к последовательности (1). Оставим в ней все дроби, целая часть которых совпадаетс максимальной частью b_0, т. е. при некоторых $n = 1, 2, \ldots$ дроби вида

$$R_0 = b_0, r_{n1} r_{n2} \ldots r_{nk} \ldots \qquad (2)$$

Для дробей (2) максимальную цифру среди первых десятичных знаковr_{n1} обозначим через b_1 и оставим в последовательности (2) все дроби, первый десятичный знак после запятой у которых совпадаетс b_1, т. е. при некоторых $n = 1, 2, \ldots$ дроби вида

$$R_1 = b_0, b_1 r_{n2} \ldots r_{nk} \ldots \qquad (3)$$

Продолжив этот процесс и переходя к последующим десятичным знакам после запятой, мы придем к бесконечной десятичной дроби$b = b_0, b_1 b_2 \ldots b_m \ldots$, у которой целая часть b_0 и mпервых десятичных знаков сразу после запятой, т. е. цифры $b_1, b_2, \ldots, b_m$ такие же, как и у дробей$R_m = b_0, b_1 b_2 \ldots b_m r_{nm+1}\ r_{nm+2} \ldots r_{nk} \ldots$,получаемых на$m$-том шаге очистки последовательности (1).

Пусть теперь m – любое наперед заданное натуральное число. Через Nобозначим номер, под которым в последовательности (1) встречается любая из дробейR_m, оставшаяся послеm-того шага очистки последовательности (1).

Тогда ясно, что рациональное числоr_n из последовательности (1) и построенная бесконечная десятичная дробь $b = b_0, b_1 b_2 \ldots \cdots b_n \ldots$ имеют одинаковые знаки, целые части и первые m десятичных знаков сразу после запятой.

Значит, бесконечная десятичная дробь $b = b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ является верхней предельной дробью последовательности рациональных чисел$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$

Если полученная дробь будет периодической с периодом 9, скажем, $b = b_0, b_1 b_2 .. b_k 99 \ldots$, то она превращается в рациональное число

$$b = b_0, b_1 b_2 \ldots b_{k-1}(b_k + 1)00\ldots$$

Для доказательства единственности предельной дроби заметим, что если $b = b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ – верхняя предельная дробь некоторой неубывающей последовательности рациональных чисел $r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_n \le \ldots$ и при некоторых натуральных k и m для $r_k = r_{k0}, r_{k1} r_{k2} \ldots r_{kn} \ldots$ выполняются равенства $r_{k0} = b_0$, $r_{k1} = b_1, \ldots, r_{k0} = b_0$, то при всех натуральных $n>k$ в силу неравенств $r_k \le r_n \le b$ также выполняются равенства $r_{n0} = b_0$, $r_{n1} = b_1, \ldots,\ r_{nm} = b_m$.

Далее, допустим от противного, что последовательность рациональных чисел $r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_n \le \ldots$ ограничена сверху и имеет хотя бы две различные верхние предельные дроби $b = b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ и $c = c_0, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots$, для которых, скажем, $b_0 = c_0,\ b_1 = c_1, \ldots,\ b_{i-1} = c_{i-1},\ b_i \ne c_i$.

Возьмем натуральное $m > i$. Тогда найдутсяномера p иq,такие, что выполняются соответственно равенства $r_{p0} = b_0, r_{p1} = b_1, \ldots, r_{pm} = b_m$ для дроби $b = b_0, b_1\ b_2\ \ldots b_n\ \ldots$ и равенства $r_{q0} = c_0, r_{q1} = c_1, \ldots, r_{qm} = c_m$ для дроби $c = c_0, c_1\ c_2 \ldots c_n \ldots$, причем в силу определения верхней предельной дроби выполняется хотя бы одно из следующих двойных неравенств: $r_p \le r_q \le b$, если $p \le q$, и $r_q \le r_p \le c$, если $q \le p$.

В первом случае (так как $m > i$) получим $r_{pi} = r_{qi} = b_i$ и $r_{qi} = c_i$, а значит, $b_i = c_i$; во втором случае получим $r_{qi} = r_{pi} = c_i$ и $r_{pi} = b_i$, а значит, $c_i = b_i$.

В любом случае, пришли к противоречию с допущением $b_i \ne c_i$.

Следовательно, любая ограниченная неубывающая последовательность рациональных чисел имеет единственную верхнюю предельную дробь.

Лемма для невозрастающей последовательности неотрицательных рациональных чисел, ограниченной снизу, доказывается вполне аналогично, но в процедуре «очистки» данной последовательности $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ в этом случае сохраняются минимальные цифры.

Если последовательность $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ вся состоит из отрицательных чисел, то лемма доказывается путем перехода к последовательности $-r_1, -r_2,\ \ldots, -r_n,\ \ldots$ положительных чисел.

Наконец, если монотонная последовательность содержит как неотрицательные, так и отрицательные числа, то для построения верхней предельной дроби достаточно рассмотреть лишь неотрицательные члены этой последовательности, а для построения нижней предельной дроби – отрицательные члены.

Лемма доказана.

Заметим, что любая бесконечная десятичная дробь вида $a = a_0, a_1 a_2 \ldots\ \ a_n \ldots$ является верхней предельной дробью следующей неубывающей последовательности рациональных чисел:

$$a_0,00\ldots;\ a_0, a_100\ldots;\ a_0, a_1a_200\ldots;\ a_0, a_1a_2 \ldots a_n00\ldots;\ \ldots,$$

а любая бесконечная десятичная дробь вида $-a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ – нижней предельной дробью следующей невозрастающей последовательности рациональных чисел:

$$-a_0, 00\ldots;\quad -a_0, a_1 00\ldots;\quad -a_0, a_1 a_2 00\ldots;\quad \ldots;\quad -a_0, a_1 a_2\ \ldots \cdots a_n 00\ \ldots;\ \ldots$$

Теперь можно определить сумму двух неотрицательных бесконечных десятичных дробей (без периода 9).

Пусть даны $a = a_0, a_1a_2\ldots$ и $b = b_0, b_1b_2\ldots$ Рассмотрим последовательность $a_0 + b_0 \le a_0, a_1 + b_0, b_1 \le a_0, a_1a_2 + b_0, b_1b_2 \le \ldots$ конечных десятичных дробей.

Ясно, что эта последовательность ограничена сверху, так как любой ее элемент не превосходит суммы $(a_0 + 1) + (b_0 + 1)$. Поэтому по основной лемме существуетверхняя предельная дробь, которая называется суммой бесконечных десятичных дробей *a* и *b*.

Произведение $a \cdot b$ двух бесконечных десятичных дробей $a = a_0, a_1a_2\ldots$ и $b = b_0, b_1b_2\ldots$ определим как верхнюю предельную дробь для последовательности $a_0 \cdot b_0 \le a_0, a_1 \cdot b_0, b_1 \le a_0, a_1a_2 \cdot b_0, \cdots b_1b_2 \le \ldots$ (она ограничена сверху рациональным числом $(a_0+1)(b_0+1)$).

В остальных случаях сначала находим произведение модулей заданных бесконечных десятичных дробей, а затем выбираем знак произведения по аналогии с конечными десятичными дробями.

Определим далее разность двух действительных чисел в том случае, когда $a \ge b \ge 0$
.

В этом случае разностью дробей *a*и*b* называетсяверхняя предельная дробь следующей неубывающей последовательности рациональных чисел:

$$a_0, a_1a_2\ldots a_n - b_0, b_1b_2\ldots b_{n-1}(b_n+1) \quad (n = 0, 1, 2\ldots).$$

Теперь уже можно определить сумму двух действительных чисел произвольного знака. Так, если $a < 0$ и $b < 0$, то $a + b = -(|a| + |b|)$; если $a < 0, b > 0$ и $|a| > b$, то $a + b = -(|a| - b)$.

Аналогично рассматриваются другие возможные случаи.

Отношение действительных чисел определяется сначала для положительных дробей как верхняя предельная дробь следующей неубывающей последовательности рациональных чисел:

$$\frac{a_0, a_1a_2\ldots a_n}{b_0, b_1b_2\ldots b_{n-1}(b_n+1)} \quad (n = 0, 1, 2\ldots).$$

В остальных случаях находим сначала отношение модулей, а затем знак отношения выбираем, как и в случае произведения; считаем $\frac{a}{b} = 0$ при $a = 0{,}000\ldots$ и $b \ne 0$; $\frac{a}{b}$ не определено, если $b = 0{,}000\ldots$

Литература

1. *НикольскийС.М.*Курсматематическогоанализа.– М.:Наука, 1991. – Т. 1, 2.
2. *ИльинВ.А.,ПознякЭ.Г.*Основыматематическогоанализа.– М., 1982. – Ч. 1, 2.
3. *ФихтенгольцГ.М.*Курсдифференциальногоиинтегральногоисчисления.– М.:Наука, 1963. – Т. 1–3.
4. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. – М., 1999.
5. *Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А.* Курс математического анализа.– М.: Гостехиздат, 1957. – Т. 1.

Поступила в редакцию 24 декабря 2013 г.

One variant of constructing the field of real numbers

A-R.K. Ramazanov[1], N.B. Chanturiya[2]

[1]Dagestan State University; ar-ramazanov@rambler.ru
[2]Abkhazian State University

The article provides an insight into a variant of constructing the field of real numbers functioning as infinite decimal fractions.

Keywords: *rational numbers, the system of real numbers.*

ReceivedDecember 24,2013