

Математика

УДК 517.946

DOI: 10.21779/2542-0321-2016-31-4-77-83

М.М. Сиражудинов^{1,2,3}, Ш.Г. Алиев², С.П. Джамалудинова^{1,3}

О гёльдеровости решений системы уравнений Бельтрами¹

¹Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; dzh-saida2012@yandex.ru;

²Дагестанский научный центр РАН; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45;

³Дагестанский государственный университет народного хозяйства; Россия, 367008, г. Махачкала, ул. Д. Атаева, 5.

В работе изучаются вопросы гёльдеровости решений эллиптических систем первого порядка в области на плоскости. Выделен класс таких систем (системы Бельтрами), для которых имеет место гёльдеровость решений. Коэффициенты системы Бельтрами – измеримые ограниченные функции, которые удовлетворяют (кроме условия эллиптичности) условию типа Кордеса, т. е. условию на разброс собственных значений матрицы коэффициентов. Система Бельтрами – не дивергентная эллиптическая система. Отметим, что и в случае дивергентных эллиптических систем второго порядка матрицы коэффициентов должны удовлетворять условию типа Кордеса (иначе не будет гёльдеровости решений).

Ключевые слова: гёльдеровость, задача Римана-Гильберта.

Вопрос гёльдеровости решений дифференциальных уравнений в частных производных при минимальных условиях гладкости коэффициентов (они измеримые и ограниченные) имеет богатую историю (см. [1–10]). По крайней мере, для дивергентных и не дивергентных эллиптических и параболических уравнений второго порядка этот вопрос положительно решен. При переходе от одного уравнения к системе ситуация усложняется. Для положительного решения вопроса теперь требуется, кроме условия равномерной эллиптичности, условие на разброс собственных значений матрицы коэффициентов.

§ 1. Об одной краевой задаче в единичном круге

Рассмотрим в единичном круге $Q_0 = \{|x| < 1\}$ с центром в начале координат краевую задачу Римана-Гильберта для системы без младших членов

$$\begin{cases} L_0 \omega = f \in \mathcal{L}_p(Q_0), & \omega \in W_p^1(Q_0), \quad p > 2, \\ \operatorname{Re} \omega = 0 \text{ на } \partial Q_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

где $L_0 \omega = \partial_{\bar{z}} \omega + \mu \partial_z \omega$, $W_p^1(Q_0)$ – пространство Соболева комплекснозначных функций.

Здесь и далее μ – квадратная матрица порядка n , $n \geq 1$, элементы которой принадлежат $\mathcal{L}_\infty(Q_0; \mathbb{C})$. Причем

$$\forall x \in Q_0 \quad \|\mu(x)\| \leq k_0, \quad (1.2)$$

k_0 – положительная постоянная (постоянная эллиптичности, $\|\mu\|$ — норма матрицы μ , рассматриваемой как оператор умножения в пространстве $\mathbb{C}^n$). Справедлива следующая теорема.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00508).

Теорема 1.1. Существует достаточно близкое к двум число $p > 2$, зависящее только от k_0 и n , такое, что задача (1.1) разрешима для любой правой части f . Причем решение однородной задачи дается формулой: $\omega = ic$, $c \in \mathbb{R}^n$. Далее любое решение (1) удовлетворяет оценкам:

$$\left\| \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right\|_{\mathcal{L}_p} + \left\| \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right\|_{\mathcal{L}_p} \leq \alpha_0 \|f\|_{\mathcal{L}_p}$$

$$|\omega(x) - \omega(y)| \leq \alpha_1 \|f\|_{\mathcal{L}_p} \cdot |x - y|^{\frac{(p-2)}{p}} \quad (\forall x, y \in \overline{Q_0}), \quad (1.3)$$

где $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ – константы, зависящие только от k_0 и n .

Доказательство. Для исследования задачи (1.1) применим метод сингулярных интегральных операторов по области. Как известно (см. [1], стр. 281), вектор функции из $W_p^1(Q_0)$, удовлетворяющий краевому условию $\operatorname{Re} \omega = 0$ на ∂Q_0 , можно представить в виде

$$\omega = T\rho + ic, \quad \rho \in \mathcal{L}_p(Q_0), \quad (1.4)$$

где T – оператор в $\mathcal{L}_p(Q_0)$, действующий покомпонентно по правилу

$$(T\rho)_j = -\frac{1}{\pi} \int_{Q_0} \left(\frac{\rho_j(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z\rho_j(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}z} \right) d\xi_1 d\xi_2 \stackrel{\text{def}}{=} T_j \rho_j.$$

(Здесь $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$; ρ_j , $j = 1, \dots, n$ – компоненты вектора ρ ; c – произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$). Свойства компонент оператора T хорошо изучены (см. [1], стр. 281). Каждая компонента есть вполне непрерывный оператор в $\mathcal{L}_p$. Для любого $\rho \in \mathcal{L}_p$ существует $\partial_{\bar{z}} T_j \rho$, причем $\partial_{\bar{z}} T_j \rho = \rho$ и $\operatorname{Re} T_j \rho = 0$ на ∂Q_0 . Подставим (1.4) в систему (1.1), тогда для определения ρ получим систему сингулярных интегральных уравнений

$$\rho + \mu S\rho = f, \quad (1.5)$$

где $S\rho$ – сингулярный интеграл, полученный из $T\rho$ дифференцированием по z под знаком интеграла. Известно, что оператор $S: \mathcal{L}_p(Q_0) \rightarrow \mathcal{L}_p(Q_0)$ – ограничен (см. [1]), причем его норма непрерывно зависит от ρ . Легко видеть, что $S = \partial_z T$ имеет в $\mathcal{L}_2(Q_0)$ норму, равную единице. Действительно, согласно (4), достаточно получить оценку $\|S\rho\| = \|\partial_z \omega\| \leq \|\rho\|$. С этой целью рассмотрим тождество

$$|\partial_{\bar{z}} \omega|^2 - |\partial_z \omega|^2 = u'_{x_2} \cdot v'_{x_1} - u'_{x_1} \cdot v'_{x_2}, \quad \omega = u + iv,$$

справедливое для любых гладких вектор-функций. Интегрируем его по области Q_0 . Затем перебросим производные с u в правой части на v интегрированием по частям, тогда с учетом краевого условия $u = \operatorname{Re} \omega = 0$ на ∂Q_0 получим, что интеграл справа равен нулю. Следовательно,

$$\|\partial_z \omega\|_{\mathcal{L}_2} = \|\partial_{\bar{z}} \omega\|_{\mathcal{L}_2}, \quad \omega \in W(Q_0) = \{\omega \in W_p^1(Q_0) \mid \operatorname{Re} \omega = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

С учетом этого получим

$$\|S\rho\| = \|\partial_z \omega\| = \|\partial_{\bar{z}} \omega\| = \|\partial_{\bar{z}}(T\rho + ic)\| = \|\rho\| \quad (1.6)$$

для любого $\rho \in \mathcal{L}_2(Q_0; \mathbb{C})$. Что и требовалось доказать.

Изучим теперь выражение $G = \mu S\rho$. Имеем:

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{L}_p}^p &= \int_{Q_0} \sum_{j=1}^n |G_j|^p dx \leq \int_{Q_0} \left(\sum_{j=1}^n |G_j|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx = \\ &= \int_{Q_0} |\mu S\rho|^p dx \leq k_0 \int_{Q_0} |S\rho|^p dx, \quad p > 2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\sum_{j=1}^n a_j^q \leq (\sum_{j=1}^n a_j)^q$, справедливым для любых $q \geq 1, a_j \geq 0, \sum_j a_j > 0$. Действительно, пусть $b_j = a_j / \sum_j a_j$. Так как $b_j \leq 1$, то $b_j^q \leq b_j, j = 1, \dots, n$. Просуммировав последнее, получим требуемое.

Положим $g = S\rho$, тогда с учетом (1.7) по неравенству Гельдера получим

$$\begin{aligned} \int_{Q_0} |S\rho|^p dx &= \int_{Q_0} \left(\sum_{j=1}^n |g_j|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \leq n^{\frac{(p-2)}{p}} \int_{Q_0} \sum_{j=1}^n |g_j|^p dx = \\ &= n^{\frac{(p-2)}{p}} \|S\rho\|_{L_p}^p \leq n^{\frac{(p-2)}{p}} \cdot c_p^p \|\rho\|_{L_p}^p, \end{aligned}$$

где c_p – норма оператора $S: \mathcal{L}_p \rightarrow \mathcal{L}_p$. Таким образом,

$$\|G\| = \|\mu S\rho\| \leq k_0 n^{\frac{(p-2)}{p^2}} \cdot c_p^p \|\rho\|, \quad (1.8)$$

где $k_0 < 1$ – константа эллиптичности из (1.2). Как было отмечено, c_p – норма оператора S – непрерывно зависит от p , причем $c_2 = 1$, согласно (1.6). Поэтому найдется такое значение $p, p > 2$, зависящее только от k_0 и n , что

$$a = k_0 n^{\frac{(p-2)}{p^2}} c_p < 1, \quad p = p(k_0, n) \quad (1.9)$$

(В дальнейшем такое p считаем фиксированным). Следовательно, оператор

$$R = E + \mu S: \mathcal{L}_p(Q_0) \rightarrow \mathcal{L}_p(Q_0),$$

где E – тождественный оператор – обратим. Значит, уравнение (1.5) разрешимо для любой правой части $f \in \mathcal{L}_p(Q_0)$, причем общее решение дается формулой (1.4), где $\rho = R^{-1}f$. Следовательно, первая часть теоремы доказана.

Докажем оценки (1.3). С этой целью разложим R^{-1} в ряд Неймана, что возможно в силу (1.8), (1.9). Тогда для решения ρ системы (1.5) получим

$$\|\rho\|_{\mathcal{L}_p(Q_0)} \leq (1 - a)^{-1} \|f\|_{\mathcal{L}_p(Q_0)}.$$

Отсюда и из свойств компонент операторов T и S (см. [1], стр. 233 и гл. 1) получим требуемые оценки (1.3). Теорема доказана.

§ 2. О гёльдеровости решений

Пусть Q – ограниченная связная область плоскости (класса $C^{1+\alpha}$), граница которой состоит из объединения непересекающихся контуров $\Gamma_0 \dots \Gamma_m, m \geq 0$, гомеоморфных окружности. Причем Γ_0 содержит внутри себя остальные. Иначе говоря, Q есть $(m+1)$ – связная область плоскости. И пусть $\omega \in W_2^1(Q)$ – решение следующей задачи Римана–Гильберта (Р–Г), правая часть которой принадлежит $\mathcal{L}_q(Q), q > 2$

$$\begin{cases} L\omega \equiv \partial_{\bar{z}}\omega + \mu\partial_z\omega + c_1\omega + c_2\omega = f \in \mathcal{L}_q(Q), \\ \omega \in W_2^1(Q), \\ \operatorname{Re}(\bar{\lambda}\omega) = 0 \text{ на } \partial Q, \end{cases} \quad (2.1)$$

где μ – квадратная матрица порядка n , элементы которой принадлежат $\mathcal{L}_\infty(Q)$. Причем

$$\operatorname{vrai} \sup_{x \in Q} \|\mu(x)\| = k_0 < 1, \quad (2.2)$$

где $k_0 \geq 0$ – фиксированная постоянная; c_1 и c_2 – квадратные матрицы порядка n , элементы которой принадлежат $\mathcal{L}_{q_0}(Q), q_0 > 2$; λ – гладкая (класса $C^1(\partial Q)$) унитарная матрица, определенная на ∂Q . И пусть x_0 – произвольная фиксированная точка Q ; $Q_\rho = Q_\rho(x_0) \subset Q$ – круг радиуса ρ с центром в точке x_0 . Рассмотрим вектор-функцию

$\omega_0 = \varphi\omega$, где $\varphi \in C_0^\infty(Q_\rho)$, $\varphi \geq 0$, $\varphi = 1$ в круге $Q_{\frac{\rho}{2}}(x_0)$. Очевидно, что ω_0 удовлетворяет следующей задаче для системы без младших членов:

$$\begin{cases} L_0\omega_0 = F, & \omega_0 \in W_2^1(Q_\rho), \\ \operatorname{Re}(\bar{\lambda}\omega) = 0 & \text{на } \partial Q_\rho, \end{cases} \quad (2.3)$$

где $F = \varphi f - \varphi(c_1\omega + c_2\bar{\omega}) + \omega\partial_{\bar{z}}\varphi + \mu\omega\partial_z\varphi$. Ввиду вложения $W_2^1(Q_\rho) \subset \mathcal{L}_q(Q_\rho)$, $q > 2$, имеем $F \in \mathcal{L}_q(Q_\rho)$. Заменой координат $x = \rho u$ задача (2.3) сводится к задаче в единичном круге. Поэтому, согласно теореме 1, § 1, она разрешима в $W_p^1(Q_\rho)$, где $p = p(k_0, n) > 2$ – достаточно близкое к двум число, для любой правой части $F \in \mathcal{L}_q(Q_\rho)$, $q > 2$. Причем соответствующая однородная задача имеет решения вида ic , $c \in \mathbb{R}^n$. Далее, то же справедливо и для пространства $W_2^1(Q_\rho)$ (см. [12]). Отсюда следует, что вектор-функция $\omega_0 = \varphi\omega$ принадлежит $W_p^1(Q_\rho)$. Следовательно, $\omega \in W_{p,loc}^1(Q)$. Более того, из первой оценки (1.3) легко следует внутренняя оценка

$$\|\omega\|_{W_p^1(Q_1; \mathbb{C})} \leq c_0 \left(\|\omega\|_{\mathcal{L}_p(Q_\rho)} + \|f\|_{\mathcal{L}_p(Q_\rho)} \right), \quad (2.4)$$

где Q_1 – любая подобласть Q , $\bar{Q}_1 \subset Q$, $c_0 > 0$ – константа, зависящая только от k_0, n , Q_1 , Q и $\mathcal{L}_p$ -норм коэффициентов при младших членах.

Изучим теперь поведение ω вблизи границы. С самого начала можно считать, что граница Q состоит из непересекающихся окружностей, одна из которых содержит внутри себя остальные. (Иначе, конформно отобразим Q на соответствующую ей каноническую область, см. [1], стр. 24). При этом вместо системы (2.1) мы получим систему того же вида. Пусть $x_0 \in \partial Q$ – любая фиксированная точка границы. И пусть $\rho > 0$ – такое, что круг $Q_\rho(x_0)$ пересекается с границей ∂Q только по дуге окружности, содержащей x_0 . Обозначим через $V(x_0)$ пересечение $Q_\rho(x_0) \cap Q$ и продолжим в $V(x_0)$ матрицу λ с сохранением унитарности и гладкости. С этой целью достаточно положить ее равной $\tilde{\lambda} = \lambda(t)$ на отрезке прямой, принадлежащей $\bar{V}$ и соединяющей граничную точку $t \in \partial V \cap \partial Q$ с центром круга, который соответствует данной граничной окружности. Пусть $\omega_1 = \tilde{\lambda}\omega$. Тогда, очевидно, что ω_1 удовлетворяет в $V(x_0)$ системе

$$\partial_{\bar{z}}\omega_1 + v_1\partial_z\omega_1 + \tilde{c}_1\omega + \tilde{c}_2\bar{\omega} = f_1, \quad (2.5)$$

где $v_1 = \tilde{\lambda}\mu\tilde{\lambda}^{-1}$, $f_1 = \tilde{\lambda}f$; $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ определяются через $c_1, c_2, \mu_j, \lambda, \mathcal{D}_j\tilde{\lambda}$ и принадлежат $\mathcal{L}_{q_0}$, $q_0 > 2$. Далее, пусть $\gamma = \partial V \cap \partial Q$, тогда на γ имеем

$$\operatorname{Re} \omega_1(t) = 0 \text{ на } \gamma. \quad (2.6)$$

Следовательно, ω_1 можно продолжить в область, симметричную V относительно дуги окружности γ . Если обозначим эту область через V_* , то это продолжение осуществляется формулой

$$\omega_0 = \begin{cases} \omega_1(z), & \text{если } z \in V, \\ -\overline{\omega_1(r^2/\bar{z})}, & \text{если } z \in V_*, \end{cases}$$

где r – радиус круга, соответствующий γ . При этом, ввиду (2.6), ω_0 принадлежит $W_2^1(Q_0)$, где $Q_0 = V \cup V_* \cup \gamma$. Далее, в области Q_0 вектор-функция ω_0 удовлетворяет системе

$$\partial_{\bar{z}}\omega_0 + \mu^0\partial_z\omega_0 + a\omega_0 + b\bar{\omega}_0 = f_0, \quad (2.7)$$

где

$$\mu^0 = \begin{cases} v(z), & \text{при } z \in V, \\ (z^2/\bar{z}^2) \overline{v(r^2/\bar{z})}, & \text{при } z \in V_*, \end{cases}$$

коэффициенты $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и f_0 определяются через $\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2, f_1$ так же, как μ^0 через ν . Здесь $\nu, \tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2$ – матрицы, определенные в (2.5).

Легко видеть, что система (2.5), а значит и система (2.7), удовлетворяют тем же условиям, что и исходная система. В частности, при получении оценки (2.2) надо учесть унитарность $\tilde{\lambda}$.

Таким образом, $\omega_0 \in W_2^1(Q_0; \mathbb{C})$ есть решение системы (2.7) с правой частью из $L_q(Q_0; \mathbb{C})$, $q > 2$. Отсюда, как и выше, получим, что $\omega_0 \in W_p^1$ в пересечении Q с $Q_{\rho/2}(x_0)$. Значит, ввиду произвольности $x_0 \in \partial Q$ и ввиду (2.4) имеем $\omega \in W_p^1(Q; \mathbb{C})$. Более того, оценка (2.4) имеет место и для всей области $Q_1 = Q$. Следовательно, доказана

Теорема 2.1. Пусть $\omega \in W_2^1(Q; \mathbb{C})$ – решение задачи Р-Г (2.1), где $f \in L_q(Q)$, $q > 2$. Тогда существует достаточно близкое к двум число $p = p(k_0, n) > 2$, $p \leq q$, такое, что $\omega \in W_p^1(Q)$. Более того, для ω имеет место оценка (2.4) с $Q_1 = Q$.

Из теоремы 2.1 ввиду теоремы вложения Соболева получим справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.2. Пусть $\omega \in W_2^1(Q; \mathbb{C})$ – решение задачи Р-Г (2.1), где $f \in L_q(Q; \mathbb{C})$, $q > 2$. Тогда ω удовлетворяет в замыкании области Q условию гёльдера с показателем $\alpha = (p - 2)/p$, $p = p(k_0, n) > 2$, $p \leq q$ и постоянной, зависящей только от k_0, n, Q, L_{q_0} -норм коэффициентов при младших членах и $\sup$ -норм элементов матрицы λ и ее производных первого порядка, а также от L_p -норм ω и f .

§ 3. О нетеровости задачи Р-Г в $W_p^1(Q; \mathbb{C})$

Пусть $p = p(k_0, n) > 2$ – число, определенное выше. Рассмотрим задачу Р-Г:

$$\begin{aligned} L\omega = f \in L_p(Q; \mathbb{C}), \quad \omega \in W_p^1(Q; \mathbb{C}) \\ \operatorname{Re}(\bar{\lambda}\omega) = 0 \quad \text{на } \partial Q. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если $f = 0$, то, согласно теореме 2.1, элементы ядра оператора L из $W_2^1(Q; \mathbb{C})$ принадлежат $W_p^1(Q; \mathbb{C})$. Следовательно, ввиду вложения $W_p^1(Q) \subset W_2^1(Q)$ ядро оператора L в W_2^1 совпадает с ядром в W_p^1 . Значит,

$$\operatorname{Ker}(L, W_2^1) = \operatorname{Ker}(L, W_p^1), \quad (3.2)$$

где $\operatorname{Ker}(L, X)$ – ядро L в X .

Согласно оценке (2.4) с $Q_1 = Q$ (см. теорему 2.1), получим: задача (3.1) нормально разрешима (см. лемму Питре [11], стр. 185). Далее, очевидно, что $\operatorname{Ker}(L^*, L_2) \subset \operatorname{Ker}(L, L_{p'})$, где $1/p + 1/p' = 1$. На самом деле здесь имеет место совпадение ядер. Докажем это от противного. Пусть существует вектор $f \in L_p(Q; \mathbb{C})$, такой, что имеем

$$J = \int_Q f \cdot \bar{\varphi} \, dx = 0 \quad \text{для любого } \varphi \in \operatorname{Ker}(L^*; L_2)$$

и $J \neq 0$ хотя бы для одного $\varphi \in \operatorname{Ker}(L^*; L_{p'})$. Следовательно, задача (3.1) при таком f не имеет решений. С другой стороны, в силу ортогональности f ядру $\operatorname{Ker}(L^*; L_{p'})$ задача (3.1) разрешима в $W_2^1(Q; \mathbb{C})$ (см. теорему 1 [12]). Тогда, согласно теореме 2.1, получим, что это решение принадлежит $W_p^1(Q; \mathbb{C})$. Полученное противоречие доказывает равенство $\operatorname{Ker}(L^*; L_2) = \operatorname{Ker}(L^*; L_{p'})$. Отсюда, ввиду (3.2), из теорем 2.1 и аналогичной теоремы для L_2 пространств (см. [12]), получим справедливость следующего утверждения

Теорема 3.1. Пусть $p = p(k_0, n) > 2$ – достаточно близкое к двум число, $p \leq p_0$. Тогда задача Римана–Гильберта (3.1) нетерова, и ее индекс равен $2\text{ind}(\det \lambda) - n(m-1)$. Далее, если ω – решение (3.1), то для него в Q имеет место оценка

$$\|\omega\|_{W_p^1} \leq c (\|\omega\|_{L_p} + \|f\|_{L_p}),$$

где $c > 0$ – константа, зависящая только от k_0, n, Q, L_{q_0} – норм коэффициентов при младших членах и $\sup$ -норм элементов матрицы λ и ее производных первого порядка.

Из теоремы 3.1 ввиду вложения $W_p^1(Q) \subset C^\alpha(\bar{Q})$, $\alpha = \frac{(p-2)}{p}$, $p > 2$, получим, что имеет место следующая

Теорема 3.2. Решение ω задачи Р-Г (3.1) гёльдерово, т. е.

$$|\omega(x) - \omega(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad x, y \in \bar{Q}$$

где $\alpha = \frac{p-2}{2}$, $p = p(k_0, n) > 2$, C – положительная постоянная, зависящая от $\|f\|_{L_p}$, $\|\omega\|_{L_p}$, k_0, n, Q .

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988.
2. Алхутлов Ю.А., Жиков В.В. О гёльдеровости решений одного эллиптического уравнения // Современная математика и ее приложения. – 2003. – Т. 10. – С. 8–21 (Тбилиси).
3. Жиков В.В. Оценки типа Нэша–Аронсона для вырождающихся параболических уравнений // Современная математика. Фундаментальная наука. – 2011. – Т. 39. – С. 66–78.
4. Кордес Г. (H.O. Cordes) Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. – Math. Ann., 1956, 131, 278–312.
5. Кошелев А.И. Регулярность решений квазилинейных эллиптических систем. – УМН. – 1978. – Т. 33. – №4. – С. 3–49.
6. Кошелев А.И. О непрерывности решений систем квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с ограниченными нелинейностями // Изв. вузов. Математика. – 1974, № 1. – С. 59–70.
7. Кошелев А.И. Регулярность решений эллиптических уравнений и систем. – М.: Наука, 1986.
8. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1964.
9. Нечас И. (J. Nečas) On the regularity of weak solutions to nonlinear elliptic systems of partial differential equations. – Lectures in Scuola Normale Superiore. – Pisa, 1979.
10. Ниренберг Л. (L. Nirenberg) On nonlinear elliptic partial differential equations and Holder continuity. – Comm. Pure and Appl. Math. – 1953. – Т. 6. – Р. 103–156.
11. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971.
12. Сиражудинов М.М. О задаче Римана–Гильберта для эллиптических систем первого порядка в многосвязной области // Матем. сб. . – 1993. – Т. 184, № 11. – С. 39–62.

Поступила в редакцию 16 октября 2016 г.

On Hölder continuity of solutions of the Beltrami equations

M.M. Sirazhudinov^{1, 2, 3}, Sh.G. Aliyev², S.P. Dzhamaludinova^{1, 3}

¹Dagestan State University; Russia, 36700, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; dzh-saida2012@yandex.ru;

²Dagestan Scientific Center RAS; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 45;

³Dagestan State University of National Economy; Russia, 367008, Makhachkala, D. Atayev st., 5.

The questions on Hölder continuity of solutions of the elliptic systems of the first order in the domain on a plane are studied in the article. The class of such systems (the Beltrami system), for which the Hölder continuity of solutions takes place, is distinguished. Coefficients of the Beltrami system are measurable limited functions which satisfy the condition (except the elliptic condition) of the Cordes type. The Beltrami system is non-divergent elliptic system. It should be noted that in the case of divergent elliptic systems of the second order the matrices of coefficients must meet the condition of the Cordes type (otherwise, it will not be Hölder continuity of solutions).

Keywords: *Hölder continuity of solutions, the Riemann-Hilbert problems.*

Received 16 October, 2016