МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

***А.-Р.К. Рамазанов*[1,2]*, В.Г. Магомедова*[1]**

Оценка скорости сходимости сплайнов по рациональныминтерполянтам через индуцированные функции

[1]*Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а;ar-ramazanov@rambler.ru;*

[2]*Дагестанский научный центр РАН; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45.*

В развитие исследований вопросов сходимости сплайнов по рациональным интерполянтам, построенных ранее авторами, получена оценка скорости безусловной сходимости интерполяционных рациональных сплайнов для произвольной непрерывной на отрезке функции через модуль непрерывности ею индуцированной функции.

Эта оценка является точной по порядку для классов функций с заданным модулемими индуцированных функций.

Как известно, полиномиальные сплайны на классе непрерывных функций не обладают свойством безусловной сходимости, так как интерполяционные полиномиальные сплайны для произвольной непрерывной на отрезке функциине обязательно равномерно сходятся к ней для любой последовательности сеток узлов с диаметром, стремящимся к нулю. Для полиномиальных сплайнов классом безусловной сходимости служит существенно более узкий класс функций, удовлетворяющих условию Липшица первого порядка.

Ключевые слова: *интерполяционные сплайны, рациональные сплайны, безусловная сходимость, индуцированные функции, скорость сходимости сплайнов.*

1. Введение

Полиномиальные сплайны и вопросы их сходимости в различных функциональных пространствах исследованы в достаточно завершенной форме(см., напр., [1–7]).

В частности, исследованы вопросы безусловной сходимости интерполяционных полиномиальных сплайнов. Следуя Ю.Н. Субботину [8], говорят, что интерполяционные сплайны безусловно сходятся к данной функции, если для любой последовательности сеток с диаметром, стремящимся к нулю, соответствующая последовательность сплайнов равномерно сходится к этой функции.

Как доказано в [2, 3, 9], для непрерывной периодической функции имеет место безусловная сходимость интерполяционных параболических (кубических) сплайнов тогда и только тогда, когда эта функция принадлежит классу $\mathrm{Lip}1$.

Представляет определенный интерес исследование аналогичных вопросов в случае рациональных сплайнов, изученных в меньшей степени. Для них рассмотрены (см., напр., [10–15] и цитирование в них) вопросы сходимости рациональных сплайнов специального вида при определенных ограничениях типа монотонности или выпуклости функций. В [16] и[17] построены интерполяционные сплайны по рациональным интерполянтам для произвольных непрерывных функций, доказана их безусловная сходимость в случае трехточечных интерполянтов, получены оценки скорости сходимости для самих функций и производных через их модули непрерывности. Однако, как хорошо известно (см., напр., [18]), в смысле гладкости индуцированная функция $F(t) = f\left(\frac{b-a}{2}\cos t + \frac{b+a}{2}\right)$может быть лучше самой непрерывной на отрезке $[a, b]$функции $f(x)$. Это явление эффекта индуцированных функций применялось для получения более точных оценок в аппроксимациях непрерывных на отрезке функций алгебраическими многочленами.

В данной работе получена оценка скорости сходимости интерполяционных сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам для произвольной непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ функции через модуль непрерывности индуцированной функции (отрезок $[-1, 1]$ вместо произвольного $[a, b]$ берется для краткости обозначений).

2. Основной результат

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$, на котором задана произвольная сетка узлов$-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1$ $(N \ge 2)$.Для троек узлов$x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ ($k = 1, 2, \ldots, N-1$) всюду ниже положим также

$$g_k = \begin{cases} 2x_{k+1} - x_k & \text{при } x_{k+1} - x_k \le x_k - x_{k-1}, \\ 2x_{k-1} - x_k & \text{при } x_{k+1} - x_k > x_k - x_{k-1}. \end{cases}$$

Выражения вида $f(t_1,\ t_2)$ и$f(t_1, t_2, t_3)$ соответственно означают разделенные разности первого и второго порядков функции $f(x)$ относительно значений $t_1,\ t_2, t_3$.

Тогда[16,17] при $k = 1,\ 2, \ldots, N-1$ для непрерывной на отрезке $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ рациональной функции

$$R_k(x) = \alpha_k + \beta_k(x - x_k) + \frac{\gamma_k}{x - g_k} \tag{1}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} \alpha_k &= f(x_k) - f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})(x_{k-1} - g_k)(x_{k+1} - g_k), \\ \beta_k &= f(x_{k-1}, x_{k+1}) + f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})(x_k - g_k), \\ \gamma_k &= f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})(x_{k-1} - g_k)(x_k - g_k)(x_{k+1} - g_k) \end{aligned} \tag{2}$$

выполняются равенства

$$R_k(x_j) = f(x_j) \quad (j = k-1, k, k+1),$$

причем при $x \in [x_{k-1}, x_{k+1}]$ имеем

$$\left| f(x) - R_k(x) \right| \le 19\omega(\delta, f), \tag{3}$$

где $\delta = \max\left\{x_k - x_{k-1}, x_{k+1} - x_k\right\}$.

Следующее утверждение существенно уточняет оценку (3).

Теорема 1. Пусть на отрезке $[-1, 1]$ задана произвольная сетка узлов$-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1$ ($N \ge 2$), точки $t_j \in [0, \pi]$ и$\cos t_j = x_j$ ($j = 0, 1, \ldots, N$).

Тогда для любой функции $f \in C[-1,1]$ и рациональной функции $R_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, N - 1$)из (1) с коэффициентами (2) при $x \in [x_{k-1}, x_{k+1}]$ выполняется неравенство

$$\left|R_k(x) - f(x)\right| \le 19\omega(h, F), \tag{4}$$

где $h = \max \{t_{k-1} - t_k, t_k - t_{k+1}\}$, $F(t) = f(\cos t)$.

Доказательство теоремы 1. Возьмем на отрезке $[0, \pi]$ точки $0 = t_N < t_{N-1} < \ldots < t_0 = \pi$, для которых $\cos t_j = x_j$ ($j = 0, 1, \ldots, N$), и рассмотрим при $k = 1, 2, \ldots, N - 1$ тригонометрические рациональные функции

$$r_k(t) = R_k(\cos t) = \alpha_k + \beta_k(\cos t - x_k) + \frac{\gamma_k}{\cos t - g_k}.$$

Тогда для индуцированной функции $F(t) = f(\cos t)$ выполняются равенства $r_k(t_j) = F(t_j)$ ($j = k-1, k, k+1$), из которых при $k = 1, 2, \ldots, N - 1$ получим следующие значения коэффициентов:

$$\alpha_k = F(t_k) - \left(\frac{F(t_{k+1}) - F(t_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{F(t_k) - F(t_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)\frac{(x_{k-1} - g_k)(x_{k+1} - g_k)}{x_{k+1} - x_{k-1}},$$

$$\beta_k = \frac{F(t_{k+1}) - F(t_{k-1})}{x_{k+1} - x_{k-1}} + \left(\frac{F(t_{k+1}) - F(t_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{F(t_k) - F(t_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)\frac{x_k - g_k}{x_{k+1} - x_{k-1}},$$

$$\gamma_k = \left(\frac{F(t_{k+1}) - F(t_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{F(t_k) - F(t_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)\frac{(x_{k-1} - g_k)(x_k - g_k)(x_{k+1} - g_k)}{x_{k+1} - x_{k-1}}.$$

Используя эти выражения для коэффициентов, оценим теперь разность $r_k(t) - F(t)$ при $t \in [t_{k+1}, t_{k-1}]$, для чего представим ее в следующем виде:

$$r_k(t) - F(t) = [F(t_k) - F(t)] - [F(t_{k+1}) - F(t_k)]\frac{(x_{k-1} - g_k)(x_{k+1} - g_k)}{(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k-1})} +$$

$$+ [F(t_k) - F(t_{k-1})]\frac{(x_{k-1} - g_k)(x_{k+1} - g_k)}{(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_{k-1})} + [F(t_{k+1}) - F(t_{k-1})]\frac{\cos t - x_k}{x_{k+1} - x_{k-1}} +$$

$$+ [F(t_{k+1}) - F(t_k)]\frac{(\cos t - x_k)(x_k - g_k)}{(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k-1})} - [F(t_k) - F(t_{k-1})]\frac{(\cos t - x_k)(x_k - g_k)}{(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_{k-1})} +$$

$$+ [F(t_{k+1}) - F(t_k)]\frac{(x_{k-1} - g_k)(x_k - g_k)(x_{k+1} - g_k)}{(\cos t - g_k)(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k-1})} -$$

$$- [F(t_k) - F(t_{k-1})]\frac{(x_{k-1} - g_k)(x_k - g_k)(x_{k+1} - g_k)}{(\cos t - g_k)(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_{k-1})}.$$

В правой части этого равенства выражения в квадратных скобках оцениваются непосредственно через модуль непрерывности индуцированной функции $F(t)$, а оценки остальных отношений проведем отдельно для двух возможных случаев: $x_{k+1} - x_k \le x_k - x_{k-1}$ и $x_{k+1} - x_k > x_k - x_{k-1}$; в этих случаях g_k равно $2x_{k+1} - x_k$ и $2x_{k-1} - x_k$ соответственно.

В первом случае последовательно имеем:

$$\left|\frac{(x_{k-1}-g_k)(x_{k+1}-g_k)}{(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_{k-1})}\right| = \frac{2x_{k+1}-x_k-x_{k-1}}{x_{k+1}-x_{k-1}} < 2;$$

$$\left|\frac{(x_{k-1}-g_k)(x_{k+1}-g_k)}{(x_k-x_{k-1})(x_{k+1}-x_{k-1})}\right| = \frac{2x_{k+1}-x_k-x_{k-1}}{x_{k+1}-x_{k-1}} < 2;$$

$$\left|\frac{\cos t-x_k}{x_{k+1}-x_{k-1}}\right| < 1 \text{ ввиду } x_{k-1} \le \cos t \le x_{k+1};$$

$$\left|\frac{(\cos t-x_k)(x_k-g_k)}{(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_{k-1})}\right| = 2\left|\frac{\cos t-x_k}{x_{k+1}-x_{k-1}}\right| < 2;$$

$$\left|\frac{(\cos t-x_k)(x_k-g_k)}{(x_k-x_{k-1})(x_{k+1}-x_{k-1})}\right| \le 2\left|\frac{\cos t-x_k}{x_{k+1}-x_{k-1}}\right| < 2;$$

$$\left|\frac{(x_{k-1}-g_k)(x_k-g_k)(x_{k+1}-g_k)}{(\cos t-g_k)(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_{k-1})}\right| = \frac{2x_{k+1}-x_k-x_{k-1}}{x_{k+1}-x_{k-1}}\cdot\frac{2(x_{k+1}-x_k)}{2x_{k+1}-x_k-\cos t} < 4;$$

$$\left|\frac{(x_{k-1}-g_k)(x_k-g_k)(x_{k+1}-g_k)}{(\cos t-g_k)(x_k-x_{k-1})(x_{k+1}-x_{k-1})}\right| = \frac{x_{k+1}-x_k}{x_k-x_{k-1}}\cdot\frac{2x_{k+1}-x_k-x_{k-1}}{x_{k+1}-x_{k-1}}\cdot\frac{2(x_{k+1}-x_k)}{2x_{k+1}-x_k-\cos t} < 4.$$

Вполне аналогично эти отношения оцениваются и во втором случае.

Следовательно, при $t\in[t_{k+1}, t_{k-1}]$ получим

$$|r_k(t)-F(t)| \le 19\omega(h,F),$$

где $h=\max\{t_{k-1}-t_k, t_k-t_{k+1}\}$, а значит, имеет место требуемое неравенство (4). Теорема 1 доказана.

По трехточечным рациональным интерполянтам $R_k(x)$ ($k=1,2,...,N-1; N\ge 2$) построим теперь на отрезке $[-1,1]$ интерполяционный рациональный сплайн $R_N(x;f)$, полагая

$$R_N(x;f) = R_k(x)\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} + R_{k-1}(x)\frac{x_k-x}{x_k-x_{k-1}} \tag{5}$$

при $x\in[x_{k-1}, x_k]$; считаем $R_0(x)\equiv R_1(x)$ и $R_N(x)\equiv R_{N-1}(x)$.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из (5) и теоремы 1.

Теорема 2. Для любой непрерывной на отрезке $[-1,1]$ функции $f(x)$, произвольного разбиения $-1=x_0<x_1<...<x_N=1$ ($N\ge 2$) и интерполяционного рационального сплайна $R_N(x;f)$ при $x\in[-1,1]$ выполняется неравенство

$$|R_N(x;f)-f(x)| \le 19\omega(\tau,F),$$

где $\tau=\max\{t_{j-1}-t_j : j=1,2,...,N\}$, $t_j\in[0,\pi]$ и $\cos t_j = x_j$ ($j=0,1,...,N$), $F(t) = f(\cos t)$.

Заметим, что теорема 2 с помощью линейной замены переменной легко распространяется на функции $f(x)$, непрерывные на произвольном конечном отрезке $[a,b]$.

Литература

1. *Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 319 с.

2. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.*Добавления к книге Дж. Алберг, Э. Нилсон, Дж. Уолш. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 317 с.

3. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.*Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.

4. *Корнейчук Н.П.*Сплайны в теории приближения.– М.: Наука, 1984. – 352 с.

5. *Черных Н.И.*Приближение сплайнами с заданнойплотностью распределения узлов // Тр. МИАН СССР. – 1975. – Т. 138. – С. 174–197.

6. *Малоземов В.Н., Певный А.Б.* Полиномиальные сплайны.– Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. – 120 с.

7. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций.– М.: Наука, 1980. – 352 с.

8. *Субботин Ю.Н.* Вариации на тему сплайнов // Фундамент.и прикл. матем. – 1997. – Т. 3, вып. 4. – С. 1043–1058.

9. *Привалов Ал.А.*О сходимости кубических интерполяционных сплайнов к непрерывной функции // Мат. заметки. – 1979. – Т. 25,вып. 5. – С. 681-700.

10. Schaback R.Spezielle rationale Splinefunktionen// J. Approx. Theory. – 1973. – Vol. 7, № 2. – P. 281–292.

11. *Duan Q., Djidjeli K., Price W.G., Twizell E.H.* Weighted rationalcubic spline interpolation and its application // J.of Computationaland Applied Mathematics. – 2000. – Vol. 117, № 2. – P. 121–135.

12. *Oja P.*Rational spline interpolation to monotonic data // Proceed. of the Estonian Acad. of Sciences. Physics*Mathematics. – 1999. – Vol. 48,№ 1. – P. 22–30.

13. *Tian R. and Geng H.L.*Error analysis of a rational interpolation spline // Intern. J. ofMathematical Analysis. – 2011. – Vol. 5, № 26. – P. 1287–1294.

14. *Hussain M.Z., Sarfraz M., Shaikh T.S.*Shape preserving rationalcubic spline for positive and convex data // Egyptian Informatics Journal. – 2011. – Vol. 12. – P. 231–236.

15. *Edeoa A., Gofeb G., Tefera* T. Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation // American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences. – 2015. – Vol. 12, № 1. – P. 110–122.

16. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.*Интерполяционные рациональные сплайны // Актуальные проблемы математики и смежные вопросы: матер. Межд. науч. конф. – Махачкала: Дагестанский государственный технический университет, 2016. –С. 68–71.

17. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.*Сплайны по рациональным интерполянтам // Дагестанские электронные математические известия. – 2015.– Вып. 4. – С. 22–31.

18. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

Поступила в редакцию 30 января 2016 г.

UDC 517.51

Estimation of the convergence degree for rational interpolant splines by meansof induced functions

A.-R.K. Ramazanov, V.G. Magomedova

[1]Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiyev st., 43a; ar-ramazanov@rambler.ru;

[2]Dagestan Scientific Center of RAS; Russia, 367025, Makhachkala,M. Gadzhiyev st., 45.

Developing the problem of spline convergence on rational interpolants, conducted by the authors of the article, an estimate of unconditional convergence of interpolant rational splines for arbitrary continuity segment through the modules of continuity function induced is given.

This estimate is accurate in order for the classes of functions with task module and the functions they induce.

It is known that polynomial splines for the class of continuous functions don’t have a property of unconditional convergence as interpolant polynomial splines for the arbitrary continuity segment function does not necessarily converge uniformly for any sequence of mesh points with the diameter tending to zero.

For polynomial splines significantly narrower class of functions meeting Lipschitzan continuity of first order is the class of unconditional convergence.

Keywords: *Interpolation splines, rational splines, unconditional convergence, induced functions, the degreeof convergence of splines.*

Received 30 January, 2016