

УДК 517.946

DOI: 10.21779/2542-0321-2016-31-3-47-53

М.М. Сиражудинов^{1, 2, 3}, С.П. Джамалудинова^{1, 3}, М.Э. Махмудова¹

Частичное усреднение недивергентного эллиптического оператора второго порядка¹

¹Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; dzh-saida2012@yandex.ru;

²Дагестанский научный центр РАН; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45;

³ Дагестанский государственный институт народного хозяйства; Россия, 367008, г. Махачкала, ул. Д. Атаева, 5

Вопросы усреднения и G -сходимости недивергентных эллиптических операторов второго порядка хорошо изучены. При выполнении условия Кордеса (условие конуса) класс таких операторов G -компактен. Для уравнений на плоскости условие Кордеса не требуется – оно есть следствие условия равномерной эллиптичности.

В работе изучены вопросы усреднения недивергентного эллиптического оператора второго порядка в области на плоскости, когда коэффициенты локально периодичны по одной из переменных, т. е. все коэффициенты вида $a(x_1, \varepsilon^{-1}x_2)$ (или вида $a(\varepsilon^{-1}x_1, x_2)$), где a – периодическая функция с периодом T по x_1 (по x_2) и периодом εT по x_2 (по x_1), $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Доказаны теоремы усреднения.

Ключевые слова: усреднение, G -сходимость, недивергентные эллиптические уравнения.

Вопросы G -сходимости и усреднения дифференциальных операторов возникают при изучении физических процессов, происходящих в сильно неоднородных средах периодической или иной упорядоченной структуры. Интересные результаты по усреднению дифференциальных уравнений получены в последние годы в работах [1–8]. Описание таких процессов в сильно неоднородных средах приводит к дифференциальным уравнениям с сильно осциллирующими коэффициентами. Так как коэффициенты таких уравнений вида $a(\varepsilon^{-1}x)$, где ε – малый параметр, $\varepsilon > 0$, эти уравнения невозможно решить даже численными методами, используя современную вычислительную технику. Поэтому механики и физики заменяют такую среду на так называемую эффективную среду. Математической моделью эффективной среды является усредненный оператор. Коэффициенты усредненного оператора постоянны, если среда имеет периодическую структуру по всем направлениям. Если же среда имеет периодическую структуру только по части направлений, возникают усредненные уравнения, коэффициенты которых постоянны только по части переменных.

В работе рассматриваются вопросы усреднения недивергентных эллиптических операторов на плоскости по одной из переменных.

В работе будем придерживаться следующих обозначений: $\mathbb{R}^2$ – обычное двумерное евклидово пространство (плоскость) со скалярным произведением $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$; $Q \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная выпуклая область плоскости с гладкой границей; $C_0^\infty(Q)$ – множество бес-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00508).

конечно дифференцируемых функций с компактными носителями из Q . $L_2(Q)$ – пространство Лебега. $W_2^k(Q)$, $k \in N$ – пространства Соболева; пространства $L_2(Q)$, $W_2^2(Q)$ – гильбертовы пространства; $W_{2,0}^2(Q)$ – подпространство пространства Соболева $W_2^2(Q)$, полученное пополнением множества гладких функций, равных нулю на границе, по норме пространства $W_2^2(Q)$. Выражение $\|u\|_{W_{2,0}^2(Q)} = \int_Q |\Delta u|^2 dx$, где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа, задает в $W_{2,0}^2(Q)$ норму, эквивалентную норме пространства $W_2^2(Q)$ (см. [9]). В дальнейшем $W_{2,0}^2(Q)$ считаем наделенным этой нормой. Кроме того, $W_{2,0}^2(Q)$ – гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$(u, v)_{W_{2,0}^2(Q)} = \int_Q \Delta u \Delta v dx = (\Delta u, \Delta v)_{L_2(Q)}, u, v \in W_{2,0}^2(Q).$$

$\langle f \rangle$ – среднее значение периодической (периода $T \neq 0$) функции, т. е. $\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$. Если функция f зависит еще от одного параметра, например $f(x, t)$, то тогда мы будем применять обозначение $\langle f(x, t) \rangle_t$, которое означает, что среднее значение берется по t . Как известно, если $f(x, t)$ – непрерывная на всей плоскости функция двух переменных x и t , периодическая по второй переменной, то тогда имеет место слабая сходимость $f(x, \varepsilon^{-1} t) \rightarrow \langle f(x, t) \rangle_t$, т. е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q f(x, \varepsilon^{-1} t) \varphi(x, t) dx dt = \int_Q \langle f(x, t) \rangle_t \varphi(x, t) dx dt, \forall \varphi \in C_0^\infty(Q),$$

где Q – любая область плоскости (x, t) , $\rightarrow$ – знак слабой сходимости в соответствующем пространстве.

§ 1. Формулировка результатов

В первом пункте второго параграфа рассмотрена задача Дирихле

$$\begin{cases} A_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x_1, \varepsilon^{-1} x_2) = f \in L_2(Q), \\ u_\varepsilon \in W_{2,0}^2(Q), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $0 < \varepsilon < 1$, ε – малый параметр; Q – ограниченная выпуклая область с гладкой (класса $C^{2+\alpha}$) границей; матрица $a = \{a_{ij}(x_1, \varepsilon^{-1} x_2)\}$ коэффициентов – симметрическая матрица, периодическая (периода εT , $T > 0$) по переменной x_2 и удовлетворяющая условию равномерной эллиптичности

$$v_0^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x_1, \varepsilon^{-1} x_2) \xi_i \xi_j \leq v_0 |\xi|^2 \quad (1.2)$$

для любого $\xi \in \mathbb{R}^2$, $\forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ и для любого $(x_1, \varepsilon^{-1} x_2) \in Q_1 \times \mathbb{R}$, где Q_1 – проекция Q на ось $0x_1$. Постоянная эллиптичности v_0 – положительное число. Задача Дирихле (1.1) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(Q)$. (Более подробно см. § 2)

Имеет место

Теорема 1. Решение u_ε задачи Дирихле (1.1) сходится в $W_2^1(Q)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению усредненной задачи Дирихле

$$\begin{cases} A_0 u_0 \equiv \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^0(x_1) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} = f \in L_2(Q), \\ u_0 \in W_{2,0}^2(Q) \end{cases} \quad (1.3)$$

для любой правой части $f \in L_2(Q)$, где

$$a_{ij}^0(x_1) = \frac{\int_0^T \frac{a_{ij}(x_1, x_2)}{a_{22}(x_1, x_2)} dx_2}{\int_0^T \frac{dx_2}{a_{22}(x_1, x_2)}}, i, j = 1, 2.$$

В случае, когда в (1.1) коэффициенты a_{ij} имеют вид $a_{ij}(\varepsilon^{-1}x_1, x_2)$, справедлива.

Теорема 2. Решение u_ε задачи Дирихле сходится в $W_2^1(Q)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению усредненной задачи Дирихле

$$\begin{cases} A_0 u_0 \equiv \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^0(x_2) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} = f \in L_2(Q), \\ u_0 \in W_{2,0}^2(Q), \end{cases}$$

для любой правой части $f \in L_2(Q)$, где

$$a_{ij}^0(x_2) = \frac{\int_0^T \frac{a_{ij}(x_1, x_2)}{a_{11}(x_1, x_2)} dx_1}{\int_0^T \frac{dx_1}{a_{11}(x_1, x_2)}}, i, j = 1, 2.$$

Теоремы 1, 2 без доказательств опубликованы в [12].

§ 2. Предварительные сведения

2.1. Недивергентные эллиптические уравнения

Недивергентным эллиптическим уравнением второго порядка в области Q плоскости называется уравнение

$$Au \equiv \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f, x = (x_1, x_2) \in Q, \quad (2.1)$$

где $a_{12} = a_{21}$. Условием равномерной эллиптичности уравнения (2.1) является условие

$$\nu_0^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \nu_0 |\xi|^2, \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \text{ п. в. } x \in Q, \quad (2.2)$$

где $\nu_0 > 0$ – постоянная, константа эллиптичности. Коэффициенты a_{ij} предполагаются измеримыми функциями. Из условия (2.2) следует, что они почти всюду (в смысле меры Лебега) ограничены в Q . Класс операторов A , определенных формулами (2.1), (2.2), будем обозначать $\mathcal{A}(\nu_0; Q)$.

2.2. Задача Дирихле

Рассмотрим для уравнения (2.1), (2.2) задачу Дирихле:

$$Au \equiv \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f \in L_2(Q), u \in W_{2,0}^2(Q). \quad (2.3)$$

Задача Дирихле (2.3) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(Q)$, причем имеют место априорные оценки

$$c_0 \|u\|_{W_{2,0}^2(Q)}^2 \leq \int_Q \frac{1}{\text{Tra}} Au \Delta u dx, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} c_1 \|u\|_{W_{2,0}^2(Q)} &\leq \|Au\|_{L_2(Q)} \leq c_2 \|u\|_{W_{2,0}^2(Q)}, \\ \forall u &\in W_{2,0}^2(Q), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где c_0, c_1, c_2 – положительные постоянные, зависящие только от постоянной эллиптичности ν_0 , $\text{Tra} = a_{11} + a_{22}$ – след матрицы a (см. [9, 10]).

2.3. G-сходимость в классе $\mathcal{A}(\nu_0; Q)$

Определение 1. Скажем, что последовательность $\{A_k\} \subset \mathcal{A}(\nu_0; Q)$ G-сходится к $A \in \mathcal{A}(\nu_0; Q)$, если для любого $f \in L_2(Q)$ последовательность $\{u_k\}$ решений задачи

Дирихле: $A_k u_k = f, u_k \in W_{2,0}^2(Q)$, сходится в $W_{2,0}^1(Q)$ к решению задачи Дирихле: $Au = f, u \in W_{2,0}^2(Q)$.

Иначе говоря, последовательность $\{A_k\}$ сходится к A , если $A_k^{-1} \rightarrow A^{-1}$ при $k \rightarrow \infty$. G -предел обозначим символом $A_k \xrightarrow{G} A$.

Известно (см. [10]), что класс $\mathcal{A}(v_0; Q)$ G -компактен, т. е. из любой последовательности операторов из класса $\mathcal{A}(v_0; Q)$ можно выделить G -сходящуюся подпоследовательность; G -предел определен единственным образом. Из свойств G -сходимости особо отметим свойство сходимости произвольных решений. Сформируем его в виде леммы.

Лемма (см. [10]). Пусть $A_k \xrightarrow{G} A, u_k \rightarrow u$ в $W_2^2(Q), f_k \rightarrow f$ в $L_2(Q)$, тогда $Au = f$.

§ 3. Усреднение по одной из переменных

3.1. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} A_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \sum_{i,j=1}^2 a_{i,j}(x_1, \varepsilon^{-1}x_2) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} = f \in L_2(Q), \\ u_\varepsilon \in W_{2,0}^2(Q), \end{cases} \quad (3.1)$$

где $0 < \varepsilon < 1$, ε — малый параметр; Q — ограниченная выпуклая область плоскости с гладкой (класса $C^{2+\alpha}$) границей; матрица $a = \{a_{ij}(x_1, \varepsilon^{-1}x_2)\}$ коэффициентов — симметрическая гладкая матрица, периодическая (периода εT , где $T > 0$) по переменной x_2 и удовлетворяющая условию равномерной эллиптичности

$$v_0^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 a_{i,j}(x_1, \varepsilon^{-1}x_2) \xi_i \xi_j \leq v_0|\xi|^2 \quad (3.2)$$

для любого $\xi \in \mathbb{R}^2, \forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ и для любого $(x_1, \varepsilon^{-1}x_2) \in Q_1 \times \mathbb{R}$, где Q_1 — проекция Q на ось Ox_1 . Постоянная эллиптичности v_0 — положительное число. Как известно (см. [9, 10]), задача Дирихле при условии (3.2) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(Q)$, причем имеет место априорная оценка

$$c_0 \|u_\varepsilon\|_{W_2^2(Q)} \leq \|f\|_{L_2(Q)}, \quad (3.3)$$

где $c_0 > 0$ — постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности v_0 .

Как известно (см. [10]), класс операторов $A(v_0, Q)$ G -компактен. Семейство $\{A_\varepsilon\}$, $0 < \varepsilon < 1$, определенное равенствами (3.1), (3.2), содержится в классе $A(v_0, Q)$, поэтому из него можно выделить G -сходящиеся подпоследовательности. Пусть $\{A_{\varepsilon_k}\} \subset \{A_\varepsilon\}$ такая подпоследовательность и $\hat{A} \in A(v_0, Q)$ — G -предел. Тогда решение u_{ε_k} задачи Дирихле $A_{\varepsilon_k} u_{\varepsilon_k} = f, u_{\varepsilon_k} \in W_{2,0}^2(Q)$ сходится в $W_2^1(Q)$ к решению u -предельной задачи Дирихле $\hat{A} u = f, u \in W_{2,0}^2(Q)$ (см. п. 2.3).

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} a_{11}(x_1, \varepsilon_k^{-1}x_2) \frac{\partial^2 u_{\varepsilon_k}}{\partial x_1^2} + 2 a_{12}(x_1, \varepsilon_k^{-1}x_2) \frac{\partial^2 u_{\varepsilon_k}}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ + a_{22}(x_1, \varepsilon_k^{-1}x_2) \frac{\partial^2 u_{\varepsilon_k}}{\partial x_2^2} = f, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $f = \hat{A} u, u$ — произвольный элемент из $W_{2,0}^2(Q)$.

Умножим (3.4) на $a_{22}^{-1} \cdot \varphi, \varphi \in C_0^\infty(Q)$ и проинтегрируем. Тогда имеем:

$$\int_Q B(x_1, \varepsilon_k^{-1}x_2) \varphi(x) \frac{\partial^2 u_{\varepsilon_k}}{\partial x_1^2} dx + 2 \int_Q C(x_1, \varepsilon_k^{-1}x_2) \varphi(x) \frac{\partial^2 u_{\varepsilon_k}}{\partial x_1 \partial x_2} dx +$$

$$+ \int_Q \varphi(x) \frac{\partial^2 u_{\varepsilon_k}}{\partial x_2^2} dx = \int_Q a_{22}^{-1}(x_1, \varepsilon_k^{-1} x_2) \varphi(x) f(x) dx,$$

где

$$\begin{aligned} B(x_1, \varepsilon_k^{-1} x_2) &= \frac{a_{11}(x_1, \varepsilon_k^{-1} x_2)}{a_{22}(x_1, \varepsilon_k^{-1} x_2)}, \\ C(x_1, \varepsilon_k^{-1} x_2) &= \frac{a_{12}(x_1, \varepsilon_k^{-1} x_2)}{a_{22}(x_1, \varepsilon_k^{-1} x_2)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Интегрированием по частям отсюда получим

$$\begin{aligned} & - \int_Q \left(\frac{\partial B(x_1, \varepsilon_k^{-1} x_2)}{\partial x_1} \varphi(x) + B(x_1, \varepsilon_k^{-1} x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial x_1} dx - \\ & - 2 \int_Q \left(\frac{\partial C(x_1, \varepsilon_k^{-1} x_2)}{\partial x_1} \varphi(x) + C(x_1, \varepsilon_k^{-1} x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial x_2} dx - \\ & - \int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial x_2} dx = \int_Q a_{22}^{-1}(x_1, \varepsilon_k^{-1} x_2) \varphi(x) f(x) dx. \end{aligned}$$

Так как $a(x_1, \varepsilon_k^{-1} x_2) \rightarrow \langle a(x_1, x_2) \rangle_{x_2}$ в $L_2(Q)$ при $\varepsilon_k \rightarrow 0$ для любой гладкой функции a , периодической по x_2 , и ввиду того, что $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u$ в $W_2^1(Q)$, после предельного перехода при $\varepsilon_k \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned} & - \int_Q \left(\left\langle \frac{\partial B(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right\rangle_{x_2} \varphi(x) + \langle B(x_1, x_2) \rangle_{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \frac{\partial u}{\partial x_1} dx - \\ & - 2 \int_Q \left(\left\langle \frac{\partial C(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right\rangle_{x_2} \varphi(x) + \langle C(x_1, x_2) \rangle_{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \frac{\partial u}{\partial x_2} dx - \\ & - \int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} dx = \int_Q \langle a_{22}^{-1}(x_1, x_2) \rangle_{x_2} \varphi(x) f(x) dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Заметим, что

$$\left\langle \frac{\partial B(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right\rangle_{x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \langle B(x_1, x_2) \rangle_{x_2}, \quad \left\langle \frac{\partial C(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right\rangle_{x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \langle C(x_1, x_2) \rangle_{x_2}.$$

Отсюда и из (3.6) получим

$$\begin{aligned} & - \int_Q \frac{\partial}{\partial x_1} (\langle B(x_1, x_2) \rangle_{x_2} \varphi(x)) \frac{\partial u}{\partial x_1} dx - 2 \int_Q \frac{\partial}{\partial x_1} (\langle C(x_1, x_2) \rangle_{x_2} \varphi(x)) \frac{\partial u}{\partial x_2} dx - \\ & - \int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} dx = \int_Q \langle a_{22}^{-1}(x_1, x_2) \rangle_{x_2} \varphi(x) f(x) dx. \end{aligned}$$

Снова интегрированием по частям получим

$$\int_Q \langle B(x_1, x_2) \rangle_{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \varphi(x) dx + 2 \int_Q \langle C(x_1, x_2) \rangle_{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \varphi(x) dx +$$

$$+ \int_Q \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \varphi(x) dx = \int_Q \langle a_{22}^{-1}(x_1, x_2) \rangle f(x) \varphi(x) dx.$$

Отсюда в силу произвольности $\varphi \in C_0^\infty$ имеем:

$$\langle B(x_1, x_2) \rangle_{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2 \langle C(x_1, x_2) \rangle_{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \langle a_{22}^{-1}(x_1, x_2) \rangle_{x_2} f. \quad (3.7)$$

Из условия эллиптичности (2) при $\xi_1 = 0, \xi_2 = 1$ получим:

$$0 < \nu_0^{-1} \leq a_{22}^{-1}(x_1, \varepsilon_k^{-1} x_2) \leq \nu_0.$$

Отсюда, ввиду слабой сходимости

$$a_{22}^{-1}(x_1, \varepsilon_k^{-1} x_2) \rightharpoonup \langle a_{22}^{-1}(x_1, x_2) \rangle_{x_2} \text{ в } L_2(Q) \text{ при } \varepsilon_k \rightarrow 0,$$

получим $0 < \nu_0^{-1} \leq \langle a_{22}^{-1}(x_1, x_2) \rangle \leq \nu_0$.

Значит, функция $\Theta(x_1) = \langle a_{22}^{-1}(x_1, x_2) \rangle_{x_2}$ отделена от нуля $0 < \nu_0^{-1} \leq \Theta(x_1) \leq \nu_0$, поэтому из (3.7) получим

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^0(x_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f.$$

Так как $f = \hat{A} u, u \in W_{2,0}^2(Q)$, где $\hat{A}$ – G-предельная точка семейства $\{A_\varepsilon\}$, имеем $\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^0(x_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \hat{A} u, u \in W_{2,0}^2(Q)$.

Ввиду произвольности $u \in W_{2,0}^2(Q)$ получим

$$\hat{A} = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^0(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (3.8)$$

Так как $\hat{A}$ – произвольная G-предельная точка семейства $\{A_\varepsilon\}$, из (3.8) имеем

$$A_\varepsilon = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x_1, \varepsilon^{-1} x_2) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \xrightarrow{G} A_0 = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^0(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теорема 1 доказана. Теорема 2 доказывается аналогично теореме 1.

Литература

1. Zhikov V.V., Yosifian G.A. Introduction to the theory of two-scale convergence // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Т. 197, № 3. – С. 325–357.
2. Zhikov V.V., Pastukhova S.E. Gamma-convergence of integrands with nonstandard coercivity and growth conditions // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Т. 196, № 4.
3. Surnachev M.D., Zhikov V.V. Stabilization of solutions to nonlinear parabolic equations of the p-laplace type // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2013. Vol. 20, № 4. – С. 523–541.
4. Жиков В.В., Пастухова С.Е. Усреднение монотонных операторов с условиями коэрцитивности и роста переменного порядка // Математические заметки. – 2011. – Т. 90, № 1. – С. 53–69.
5. Zhikov V.V. Homogenization of a Navier-Stokers-type system for electrorheological fluid // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2011. – Т. 56, № 7–9. – С. 545–558.
6. Жиков В.В., Пастухова С.Е. Леммы о компенсированной компактности в эллиптических и параболических уравнениях // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. – 2010. – Т. 270. – С. 110–137.
7. Жиков В.В. Усреднение системы типа Навье Стокса для электрореологической жидкости // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 434, № 1. – С. 16–20.

8. Zhikov V.V. On the weak convergence of fluxes to a flux // *Doklady Mathematics*. – 2010. – Т. 82, № 2. – С. 58–62.

9. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973.

10. Жиков В.В., Сиражудинов М.М. О G -компактности одного класса недивергентных эллиптических операторов // *Известия АН СССР, Сер. Математика*. – 1981. – Т. 45, № 4.

11. Жиков В.В., Сиражудинов М.М. Усреднение недивергентных эллиптических и параболических операторов второго порядка и стабилизация решения задачи Коши // *Мат. сб.* – 1981. – 116 (158) : 2 (10), 1981.

12. Сиражудинов М.М., Джамалудинова С.П., Агаева Ж.Ш., Рамазанов Ш.Р. Усреднение недивергентного эллиптического уравнения второго порядка по одной из переменных // *Актуальные проблемы математики и смежные вопросы*. – Махачкала, 2016.

Поступила в редакцию 10 сентября 2016 г.

UDC 517.946

DOI: 10.21779/2542-0321-2016-31-3-47-53

Partial averaging of the nondivergence second order elliptic operator

M.M. Sirazhudinov^{1,2,3}, S.P. Dzhamaludinova^{1,3}, M.E. Mahmudova³

¹*Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiyev st., 43a; dzhsaida2012@yandex.ru;*

²*Dagestan Scientific Center RAS; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiyev st., 45;*

³*Dagestan State Institute of National Economy; Russia, 367008, Makhachkala, D. Atayev st., 5*

The problem of averaging and G -convergence of non-divergent elliptic operators of the second order is well studied. If the Cordes condition (cone condition) is satisfied then the class of such operators is G -compact. For equations in the plane the Cordes condition is not required – it is a consequence of the condition of uniform ellipticity. The problem of averaging of nondivergence of the second order elliptic operator in the plane when the coefficients are locally periodic on one of the variables, i. e. all coefficients of the form $a(x_1, \varepsilon^{-1}x_2)$ (or type $a(\varepsilon^{-1}x_1, x_2)$), where a is a periodic function with period T on x_1 (on x_2) and the period εT on x_2 (on x_1), $\varepsilon > 0$ a small parameter are studied in the paper. Homogenization theorems are proved.

Keywords: *averaging, homogenization, G -convergence, non-divergent elliptic equations.*

Received 10 September, 2016