УДК 517.946

Смешанная задача для многомерной параболической системы

М.Д. Дибиров

Рассмотрим систему:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ A_k(x_k) \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} + B_k(x_k) \frac{\partial U}{\partial x_k} + C_k(x_k) U \right\} \qquad (1)$$

в параллелепипеде $a_k \le x_k \le b_k$ при граничных и начальных условиях:

$$U\Big|_{x_i=a_i,b_i}=0, \tag{2}$$

$$U(x_1,\ldots,x_n,0)=\varphi(x_1,\ldots,x_n), \tag{3}$$

где A_k, B_k, C_k – $n\times n$, дифференцируемые матрицы, φ – дважды непрерывно дифференцируемый n – мерный столбец, равный нулю на гранях.

(1) – параболическая система в том смысле, что при $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2=1$, γ – корни уравнения

$$\det\left(\gamma E+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2A_i(x_i)\right)=0$$

имеют отрицательные действительные части, см.[1].

К задаче (1) – (3) подбираем следующие задачи с параметрами:

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{A_k(x_k)\frac{\partial^2V}{\partial x_k^2}+B_k(x_k)\frac{\partial V}{\partial x_k}+C_k(x_k)V\right\}-\lambda^2V=\varphi(x_1,\ldots,x_n) \tag{4}$$

$$V\Big|_{x_i=a_i,b_i}=0, \tag{5}$$

$$A_k(x_k)\frac{d^2W}{dx_k^2}+B_k(x_k)\frac{dW}{dx_k}+C_k(x_k)W-\mu_k^2W=\mu_kA_k^{-1}(x_k)\psi(x_k), \tag{6}$$

$$W\Big|_{x_k=a_k,b_k}=0. \tag{7}$$

Из условия параболичности следует, что все характеристические корни матрицы $A_k(x_k)$ имеют положительные действительные части. Мы будем их считать дополнительно различными, а их аргументы, не зависящими от x_k. Это значит, что в характеристическом уравнении Биркгофа системы (6):

$$\det\left(\Theta^2E-A_k^{-1}(x_k)\right)=0,$$

для Θ – корней справедливо неравенство

$$-\frac{\pi}{4}<\arg\Theta<\frac{\pi}{4} \quad \text{или} \quad -\frac{3\pi}{4}<\arg\Theta<\frac{5\pi}{4} \quad \text{см. [2].}$$

Аналогично [3, с.143], ограничиваясь случаем простых полюсов функции Грина $G_k(x_k,\xi_k,\mu_k^2)$ задачи (6) – (7), введем в рассмотрение операторы:

$$P_{\nu_k}(F(x_k))\equiv F_{\nu_k}(x_k)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{\nu_k}}\mu_k d\mu_k\int_{a_k}^{b_k}G(x_k,\xi_k,\mu_k^2)A_k^{-1}(\xi_k)F(\xi_k)d\xi_k\,,$$

$$k=\overline{1,n},\quad \nu_k=1,2,\ldots$$

Для функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ справедлива формула разложения

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\nu_1,\ldots\nu_n=1}^{\infty}\varphi_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1,\ldots,x_n),\quad a_k<x_k<b_k \tag{8}$$

в виде кратного равномерно сходящегося ряда при суммировании по прямоугольникам [3].

Применение проекторов P_{ν_k} к обеим частям (4) с учетом простоты полюсов μ_{ν_k} даст:

$$(\mu_{\nu_1}^2+\cdots+\mu_{\nu_n}^2-\lambda^2)V_{\nu_1\ldots\nu_n}=\lambda\varphi_{\nu_1\ldots\nu_n},$$

откуда с учетом (8)

$$V(x_1,\ldots,x_n,\lambda)=\sum_{\nu_1\ldots\nu_n=1}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_{\nu_1\ldots\nu_n}}{\mu_{\nu_1}^2+\ldots+\mu_{\nu_n}^2-\lambda^2}. \tag{9}$$

Как показано в [2], $\mu_{\nu_k}^2$ асимптотически расположены в секторе, строго лежащем в левой полуплоскости. Следовательно, то же можно сказать о полюсах $\lambda_{\nu_1\ldots\nu_n}^2=\mu_{\nu_1}^2+\ldots+\mu_{\nu_n}^2$ функции $V(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$. Из проведенных построений следует

Теорема. Решение задачи (1) – (3) можно представить в виде быстросходящегося ряда:

$$U(x_1,\ldots,x_n,t)=-\frac{1}{\pi i}\sum_{\nu_1\ldots\nu_n=1}^{\infty}\int_{C_{\nu_1\ldots\nu_n}}e^{\lambda^2 t}V(x_1,\ldots,x_n,\lambda)d\lambda,$$

где $C_{\nu_1\ldots\nu_n}$ – контур, содержащий внутри единственный полюс

$$\lambda_{\nu_1\ldots\nu_n}=+\sqrt{\mu_{\nu_1}^2+\ldots+\mu_{\nu_n}^2}.$$

Абстрактная схема изложенного процесса следующая. Решается задача Коши в гильбертовом пространстве H, являющемся тензорным произведением n экземпляров гильбертовых пространств

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\sum_{k=1}^{n}A_k'U,\qquad U(0)=\psi \tag{10}$$

$$U,\psi\in H=H_1\otimes\ldots\otimes H_n$$

$$A_k'=\underbrace{I\otimes\ldots\otimes I}_{k-1}\otimes A_k\otimes\underbrace{I\otimes\ldots\otimes I}_{n-k}$$

Очевидно, операторы A_k' – перестановочны.

Пусть A_k имеет спектр, состоящий из счетного числа нормальных собственных значений μ_ν^k алгебраической кратности 1, что, впрочем, лишь упрощает рассуждения. Предполагаем, что система собственных векторов полна в H_k.

К задаче (10) строим вспомогательное уравнение:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k' V(\lambda) - \lambda V(\lambda) = \psi \tag{11}$$

Рассматриваем проекторы, см. [4]

$$P_{\nu_i}\psi \equiv \psi_{\nu_i} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\nu_k}} \left(A_k' - \mu_{\nu_k} I\right)^{-1} d\mu_k \psi \tag{12}$$

Очевидно, из указанного условия полноты собственных векторов оператора A_k' следует, что $= \sum_{\nu_k} \psi_{\nu_k}$ и далее

$$= \sum_{\nu_1 \dots \nu_n} \psi_{\nu_1 \dots \nu_n} . \tag{13}$$

Применяя проекторы (12) к обеим частям (11), получим

$$\left(\mu_{\nu_1} + \dots + \mu_{\nu_n} - \lambda\right)\psi_{\nu_1 \dots \nu_n} = \psi_{\nu_1 \dots \nu_n},$$

и далее из (13) следует

$$V(\lambda) = \sum_{\nu_1 \dots \nu_n = 1}^{\infty} \frac{\psi_{\nu_1 \dots \nu_n}}{\mu_{\nu_1} + \dots + \mu_{\nu_n} - \lambda},$$

а также

$$U = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu_1 \dots \nu_n = 1}^{\infty} \psi_{\nu_1 \dots \nu_n} \int_{C_{\nu_1 \dots \nu_n}} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda_{\nu_1 \dots \nu_n} - \lambda},$$

где $\lambda_{\nu_1 \dots \nu_n} = \mu_{\nu_1} + \dots + \mu_{\nu_n}$.

Литература

1. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. Секция А. 1. Вып 7. 1938. - С. 2 – 72.
2. *Расулов М.Л.* Применение метода контурного интеграла. - М.: Наука, 1975. - 255 с.
3. *Вагабов А.И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. - Ростов–на–Дону: РГУ. - 160 с.
4. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. - М.: Наука, 1965. - 448 с.